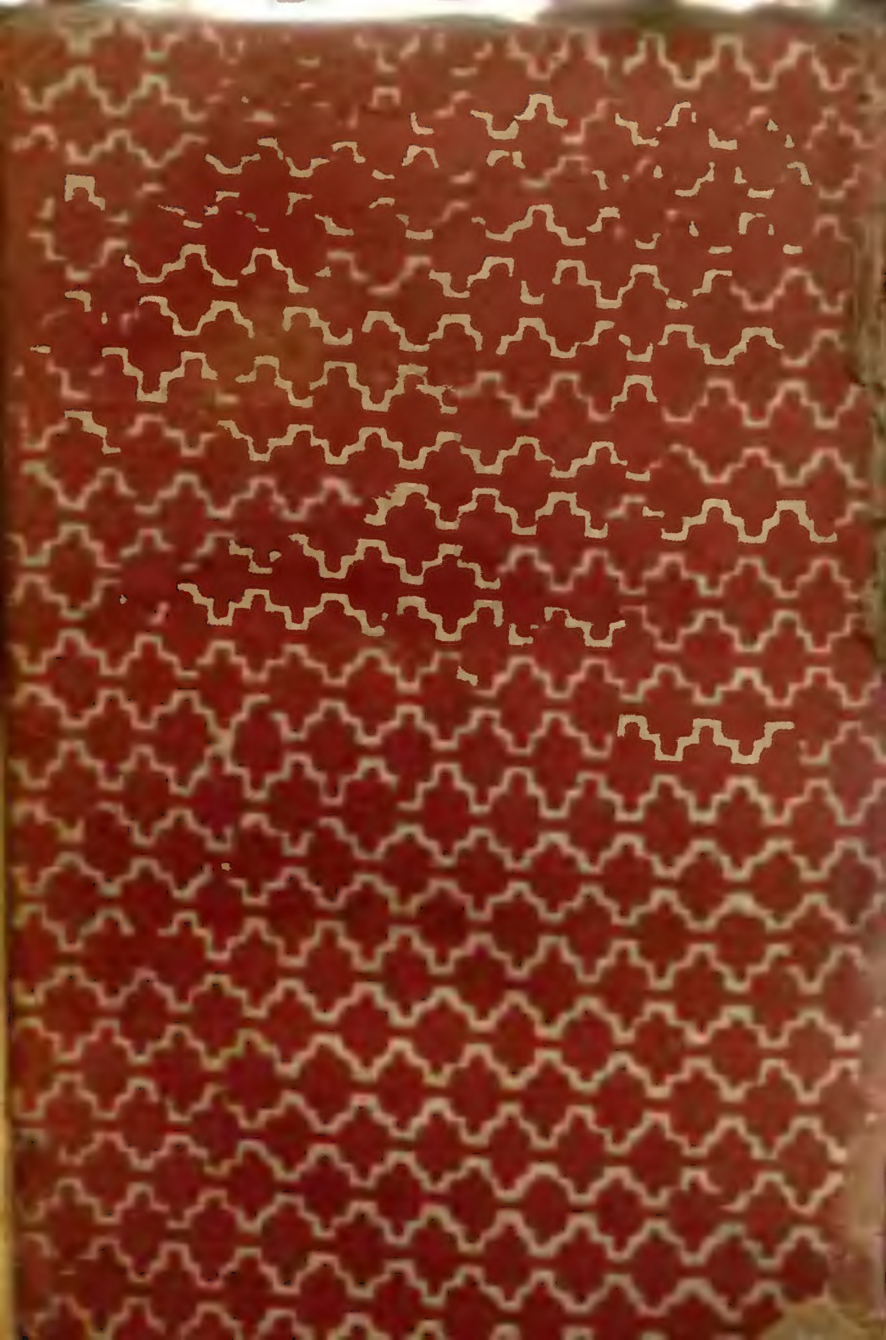


1594 – Xб 3

B - 10518

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИѲМЕТИКА

Г. Леонгарда Ейлера.

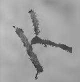
Переведенная съ нѣмецкаго подлинника Академіи Наукъ адьюнктомъ Петромъ Иноходцовымъ

и студентомъ Иваномъ Юдинымъ.

ТОМЪ ВТОРЫЙ,

въ которомъ предлагаются правила, рѣшенія уравненій, и Діофанскій образъ рѣшить вопросы.

при Императорской Академіи Наукъ 1769 года.



РОСПИСЬ МАТЕРІЯМЪ.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

объ Алгебраическихъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ.

О неопредѣленном Аналитикѣ

III.

)(2 XI.

конецѣ розписи.

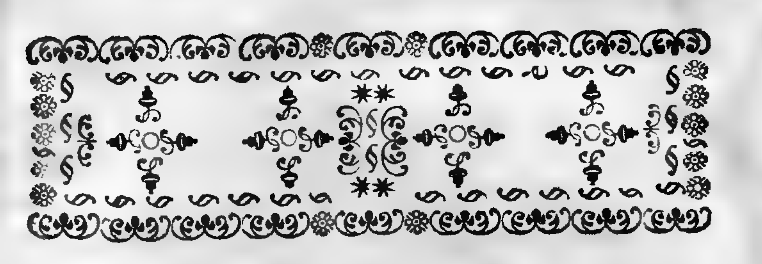
ПОГРѢШНОСТИ.

стран.	строка	напечатано	читай
11	3	$\pm a$	$+a$
—	4	$\pm 2a$	$+2a$
34	1	$a\ c-x$	a $c-x$
45	6	$2y=18^c x$	$2y=18$
52	9	19^3	$19\frac{1}{3}$
58	1	$\frac{1}{4}b$	$\frac{1}{4}f$

стран.	строка	напечатано	читай.
62	8	$\frac{cx+f}{gx+b}$	$\frac{ex+f}{gx+b}$
82	5	$\frac{27}{a}$	$\frac{27}{2}$
85	4	$\sqrt{(\frac{1}{4}+11a)}$	$\sqrt{(\frac{1}{4}+110)}$
89	19	$100=x$	$100-x$
92	16	$\sqrt{}$	n
93	2, 3, 4, 5, 6, 7,	$\sqrt{}$	n
107	6	$\frac{\sqrt{(-c}}{2}$	$\frac{\sqrt{(a-c)}}{2}$
108	10	$b=\frac{1}{4}; -3$	$b=\frac{1}{4}. -3$
128	10	$fxx\pm xxgx+b=0$	$fxx\pm xxgg+4fbx_x=0$
136	20	$x\,c=0$	$x-c=0$
145	3	$b=pq+pr+qr$	$b=pq+pr+qr$
152	21	q	8
155	4	124	$124x$
197	3	$x=5+\sqrt{\frac{1}{4}}$	$x=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}$
202	8	$g=\frac{bb}{64}$	$b=\frac{bb}{64}$
203	14	$\sqrt{9}=\frac{1}{2}b$	$\sqrt{b}=\frac{1}{2}b$
228	22	частыя	частныя
236	14	$2y=7z+x$	$2y=7z+1$
246	4	останется, 6,	останется. 2.
306	12	$1681=412$	$1681=41^2$.
319	21	$25nn+19n+1$	$25nn+10n+1$
342	21	поставь $-g$, вмѣсто g	поставь g, вмѣсто $-g$
350	15	$n=\frac{p+\sqrt{(3pp\ \ 2)}}{2}$	$n=\frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$
352	21	$\frac{1}{8}q^2$	$\frac{1}{8}q$
356	3	$q=\frac{2r+\sqrt{(15rr-3s)}}{3}$	$q=\frac{2r+\sqrt{(15rr-3)}}{3}$

36

стран.	строка	напечатано	читай.
361	16	$n\frac{\pm ep+\sqrt{(eepp+2pp-2)}}{2}$	$n=\frac{-ep+\sqrt{(eepp+2pp-2)}}{2}$
369	18	$=ff+2fp$	$=ff+2fpx$
37[illegible]	15	$=ff+dx^4$	$=ff+dx^3$
383	3	$x=\frac{d}{e}$	$x=\frac{d}{-e}$
412	7	$\frac{2-8y+8yy\ \ 8y^3}{(1-y)^3}$	$\frac{2-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$
428	22	$y=1-,$	$y=1,$
445	2, 3.	$xx+yy=(pp+qq2^2$	$xx+yy=(pp+qq)^2$
454	3	$c=7x=5p^3-21pqq$	$c=7;\ x=5p^3-21pqq$
—	22	когда	тогда
458	15	$(x+y\sqrt{c})$	$(x+y\sqrt{-c})$
—	16	$(x-y\sqrt{c})$	$(x-y\sqrt{-c})$
464	9	x^4-y^4	x^4+y^4
485	5	$x=\frac{9s-22rrss+r^4}{4rrss}$	$x=\frac{9s^4-22rrss+r^4}{4rrss}$
—	12	$x+7=\frac{166}{9}$	$x_5+7=\frac{162}{9}$
491	21	$xx\ u\ yy$	xx и yy
492	17	$y=2pq+pp-qq$	$y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq}$
495	15	$z=\frac{7c-d}{5}$	$y=\frac{7c-d}{5}$
506	11	$=\frac{bs}{-as^2}+\frac{2ab(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}$	$=\frac{bss-as^3+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}$
517	2	$5+r=2f$	$s+r=2f$
529	17	$x=pp-acc$	$x=bb-acc$
549	14	$=\frac{676}{9}-\frac{25}{3}$	$=\frac{676}{9}p-\frac{52}{3}$
555	19	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{12}{3}r$



ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ,

объ алгебраическихъ уравненіяхъ и о ихъ рѣшеніи.

ГЛАВА I.

О рѣшеніи задачь вообще.

563.

Главное намѣреніе алгебры, такъ какъ и протчихъ частей математики, клонится туда, чтобъ опредѣлить величину неизвѣстныхъ количествъ, что дѣлается изъ подробнаго разсмотренія обстоятельствъ въ вопросѣ предписанныхъ,

ныхъ, и означенныхъ извѣстными количествами. Чего ради алгебру опредѣлить можно и симъ образомъ, то есть, что въ ней показывается, какимъ образомъ изъ данныхъ или извѣстныхъ количествъ находить неизвѣстные.

564.

Сіе сходствуетъ со всѣмъ тѣмъ, что по сіе мѣсто уже предложено было; ибо вездѣ изъ данныхъ количествъ искаһы были такіе, которые прежде какъ неизвѣстные мы брали. Первой тому примѣръ даетъ сложеніе, гдѣ данныхъ двухъ или больше чиселъ находили мы сумму, то есть, такое число, которое даннымъ числамъ вмѣстѣ взятымъ равно было.

Въ вычитаніи искали мы число равное разности двухъ данныхъ чиселъ.

Самое то же примѣчается въ умноженіи, дѣленіи, въ возвышеніи до степеней и извлеченіи корней, гдѣ всегда изъ данныхъ чиселъ находится неизвѣстное.

565.

ВЪ послѣдней части разрѣшили уже мы нѣкоторые вопросы, при чемЪ всегда искали такое число, которое изЪ другихЪ данныхЪ чиселЪ по нѣкоторымЪ обстоятельствамЪ опредѣлить должно было.

Чего ради всѣ вопросы клонятся туда, чтобЪ изЪ данныхЪ нѣкоторыхЪ чиселЪ находить новое, состоящее сЪ прежними вЪ нѣкоемЪ союзѣ, которой опредѣляется по нѣкоторымЪ обстоятельствамЪ или свойствамЪ принадлежащимЪ кЪ искомому числу.

566.

Во всякомЪ вопросѣ искомое число означается послѣдними буквами алфавита, и смотрится на предписанныя вЪ немЪ обстоятельства, которые даютЪ уравненіе между двумя числами. ИзЪ такого уравненія должно потомЪ опредѣлить величину искомаго числа, чрезЪ что разрѣшится и самой вопросЪ. Случаются иногда вопросы, гдѣ ищется

больше нежели одно число, но что равнымъ образомъ чрезъ уравненія совершается.

567.

Сіе можно лучше изъяснить самимъ примѣромъ. Представь себѣ вопросъ такой:

20 человѣкъ мущины и женщины вмѣстѣ ѣдятъ въ трактирѣ, мущина платитъ 8 грош., а женщина 7 грош. вся же сумма денегъ, которую они хозяину заплатили дѣлаетъ 6 талеровъ; спрашивается, сколько мущинъ, и сколько женщинъ въ томъ числѣ было?

Для рѣшенія сего вопроса положи число мущинъ $= x$, и поступай съ нимъ такъ какъ съ извѣстнымъ количествомъ, то есть, какъ будто бы хотѣлъ опробовать рѣшится ли заданной вопросъ, ежели число мущинъ положится x, когда же мущины и женщины вмѣстѣ дѣлаютъ 20 человѣкъ, то можно отсюда опредѣлить и число женщинъ, которое выдетъ ежели число мущинъ вычтется изъ 20, по чему число женщинъ $= 20 - x$. Каждой мущина

мущина платитъ 8 грошей, слѣдов. x мущинъ заплатятъ $8x$ грошей. Каждая женщина платитъ 7 грош., то $20-x$ женщинъ заплатятъ $140-7x$ грош. слѣдовательно мущины и женщины вмѣстѣ платятъ $140+x$ грош.; а мы знаемъ сколько они истратили, то есть 6 рейхсталеровъ, которые въ грошахъ дѣлаютъ 144, чего ради будемъ мы имѣть сїе уравненїе $140+x=144$, откуда ясно видно, что $x=4$.

И такъ въ трактирѣ было 4 мущины и 16 женщинъ.

568.

Другой подобной сему вопросъ.

20 человѣкъ женщины и мущины вмѣстѣ были въ трактирѣ; мущины платятъ 24 гулдена, и женщины также 24 гулдена, при чемъ извѣстно, что каждой мущина долженъ былъ платить одинъ гулденъ больше нежели женщина, спрашивается; сколько было мущинъ и сколько женщинъ?

Пусть будетъ число мущинъ $=x$, то число женщинъ будетъ $=20-x$ и когда x мущинъ вмѣстѣ истратили 24 гулдена, то каждой изъ нихъ заплатилъ $\frac{24}{x}$ гулд.

$20-x$ женщинъ истратили 24 гулдена, то каждая изъ нихъ издержала $\frac{24}{20-x}$ гулд. и поелику сія издержка женщины однимъ гулденомъ меньше, нежели издержка мущины, то ежели изъ заплаченной суммы денегъ мущиною вычтется 1 гулденъ, останется издержка женщины, откуда получится уравненіе $\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$, и изъ сего уравненія надлежитъ искать величину x, которую не такъ легко здѣсь вывесть можно, какъ въ первомъ вопросѣ. Но въ слѣдующихъ увидимъ, что $x=8$ сходствуетъ съ найденнымъ уравненіемъ $\frac{24}{8}-1=\frac{24}{12}$; $2=2$.

569.

Въ каждомъ вопросѣ главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ означивъ буквами неизвѣстные или искомые коли-

чества

чества разсмотрѣть точняе обстоятельства вопроса, и изъ нихъ вывесть уравненіи; потомъ разрѣшить найденное уравненіе, или сыскать величину неизвѣстныхъ чиселъ, о чемъ въ сеи части говорено будетъ.

570.

Самые вопросы разнятся также между собою, ибо въ нѣкоторыхъ ищется только одно число, а въ иныхъ 2 или больше; и въ семъ послѣднемъ случаѣ требуется столькожъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ или искомыхъ количествъ въ немъ будетъ, которые всѣ выводить надобно изъ обстоятельствъ вопроса.

571.

И такъ уравненіе состоитъ изъ двухъ членовъ, изъ коихъ одинъ другому равенъ полагается; а что бы изъ уравненія опредѣлить величину не извѣстнаго количества, потребны бываютъ часто весьма многіе перемѣны, кои всѣ основаніе свое имѣютъ на томъ, что

когда количества равны между собою, равны будутЪ также, ежели кЪ обѣимЪ изЪ нихЪ одинакіе величины придадутся, или изЪ нихЪ вычтутся; равнымЪ образомЪ, ежели они оба на одно какое нибудь число умножатся или раздѣлятся, ежели они до одинакой степени возвысятся, или одинакіе корни изЪ нихЪ извлекутся, и наконецЪ ежели обоихЪ ихЪ возмутся логариѳмы, что уже и вЪ прежней части учинено было.

572.

ТѢ уравненія, вЪ которыхЪ кромѣ первой степени не извѣстнаго числа не находится, весьма легко рѣшатся, и называются уравненіями первой степени. ПотомЪ слѣдуютЪ уравненія, вЪ которыхЪ вторая степень или квадратЪ не извѣстнаго количества находится, и называются квадратныя уравненія, или уравненія второй степени; уравненія третей степени, гдѣ кубЪ не извѣстнаго количества находится, и такЪ далѣе, о чемЪ вЪ сей части обЪявлено будетЪ.

ГЛАВА

ГЛАВА II.

Объ уравненіяхъ первой степени и ихъ рѣшеніи.

573.

Ежели неизвѣстное, или искомое количество означится буквою x, и найденное уравненіе будетъ уже на одной сторонѣ знака $=$ имѣть одно только x, а на другой всѣ данныя числа, какъ $x=25$, то искомая величина x, уже дѣйствительно имѣется; и всегда стараться надобно дойти до сей формулы, какъ бы смѣшено ни было первое уравненіе. На сей конецъ въ слѣдующихъ предпишутся правила.

574.

Начнемъ сперва съ самыхъ легкихъ случаевъ, и положимъ, что нѣкто дошелъ до сего уравненія:

$x+9=16$, то видно, что $x=7$.

Пусть будетъ вообще $x+a=b$, гдѣ a и b означаютъ данные числа, какіябы

они ни были. Здѣсь должно съ обѣихъ сторонъ вычесть a, и получится уравненіе $x=b-a$, которое опредѣляетъ намъ величину x.

575.

Ежели найденное уравненіе будетъ $x-a=b$, то придай съ обѣихъ сторонъ a, и будетъ $x=b+a$, что означаетъ величину x.

Точно также поступать надлежитъ, ежели первое уравненіе будетъ $x-a=aa+1$: ибо тогда $x=aa+a+1$, изъ уравненія $x-8a=20-6a$ получится $x=20-6a+8a$ или $x=20+2a$, а изъ $x+6a=20+3a$ найдется $x=20+3a-6a$, или $x=20-3a$.

576.

Когда же найденное уравненіе будетъ $x-a+b=c$, то здѣсь можно съ обѣихъ сторонъ придать a, и выдетъ $x+b=c+a$, потомъ вычесть съ обѣихъ сторонъ b, и будетъ $x=c+a-b$. Можно также съ обѣихъ сторонъ придать вдругъ $+a-b$, и будетъ $x=c+a-b$,

такъ

такЪ вЪ слѢдующихЪ примѢрахЪ, когда $x-2a+3b=0$, то будетЪ $x=2a-3b$ когда $x-3a+2b=25+a+2b$, то будетЪ $x=25+4a$, и когда $x-9+6a=25+2a$, то $x=34-4a$.

577.

Ежели найденное уравненіе имѢть будетЪ формулу $ax=b$, то раздѢли сЪ обѢихЪ сторонЪ на a, и будетЪ $x=\frac{b}{a}$. А когда $ax+b-c=d$, то должно сперва то, что при ax находится отнять прочь, то есть, придать сЪ обѢихЪ сторонЪ $-b+c$, и будетЪ $ax=d-b+c$, сего ради $x=\frac{d-b+c}{a}$.

Пусть будетЪ $2x+5=17$, то выдетЪ $2x=12$, и $x=6$

$3x-8=7$ выдетЪ $3x=15$, и $x=5$

$4x-5-3a=15+9a$, выдетЪ $4x=20+12a$

и $x=\frac{20+12a}{4}=5+3a$.

578.

Когда уравненіе будетЪ $\frac{x}{a}=b$, то помножь сЪ обѢихЪ сторонЪ на a и будетЪ $x=ab$. И когда $\frac{x}{a}+b-c=d$, то сперва

ва будетъ $\frac{x}{a}=d-b+c$ и потомъ $x=(d-b+c)a=ad-ab+ac$.

Пусть будетъ $\frac{1}{2}x-3=4$, то будетъ $\frac{1}{2}x=7$, и $x=14$

——— $\frac{1}{3}x-1+2a=3+a$; $\frac{1}{3}x=4-a$, и $x=12-3a$

——— $\frac{x}{a-1}-1=a$ ——— $\frac{x}{a-1}=a+1$; $x=(a+1)(a-1)=aa-1$.

579.

Ежели уравненіе будетъ $\frac{ax}{b}=c$, то умножь съ обѣихъ сторонъ на b, и будетъ $ax=cb$, и $x=\frac{cb}{a}$. Когда же $\frac{ax}{b}-c=d$, то будетъ $\frac{ax}{b}=d+c$, и $ax=bd+bc$, слѣд. $x=\frac{bd+cb}{a}$. Пусть будетъ $\frac{2}{3}x-4=1$, то $\frac{2}{3}x=5$, $2x=15$ и $x=\frac{15}{2}$ то есть $7\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5$, то будетъ $\frac{3}{4}x=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$, $3x=18$ и $x=6$.

580.

Статься можетъ, что больше нежели одинъ членъ уравненія содержатъ въ себѣ букву x, и стоятъ на одной или на обѣихъ сторонахъ знака равенства. Ежели они будутъ на одной сторонѣ, какъ $x+\frac{1}{2}x+5=11$, то будетъ $x+\frac{1}{2}x=6$, $3x=12$,

$=12$, и $x=4$. Пусть будетъ $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=44$, что будетъ x? Умножь сперва на 3 и выдетъ $4x+\frac{3}{2}x=132$, потомъ умножь еще на 2 и будетъ $11x=264$ слѣд. $x=24$; но сіи три числа могутъ вдругъ соединены быть въ одинъ членъ, какъ $\frac{11}{6}x=44$, раздѣли съ обѣихъ сторонъ на 11, и выдетъ $\frac{1}{6}x=4$, и $x=24$

Положи $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x=1$, что соединивъ въ одинъ членъ дастъ $\frac{5}{12}x=1$, и $x=2\frac{2}{5}$ также когда $ax-bx+cx=d$, то сіе будетъ тоже что и $(a-b+c)x=d$, откуда выдетъ $x=\frac{d}{(a-b+c)}$

581.

Когда же x находится въ обѣихъ частяхъ уравненія, какъ $3x+2=x+10$, то должно x съ одной стороны, гдѣ оно умножено на меншее число, перенесть на другую; чего ради вычти съ обѣихъ сторонъ x, и выдетъ $2x+2=10$, и $2x=8$, слѣд. $x=4$. Пусть будетъ еще $x+4=20-x$, то $2x+4=20$, $2x=16$ и $x=8$.

Положи $x+8=32-3x$, то будетъ $4x+8=32$, и $4x=24$, слѣд. $x=6$.

Также

Также $15-x=20-2x$, то $15+x=20$, слѣд. $x=5$.

Пусть будетъ $1+x=5-\frac{1}{2}x$, то $1+\frac{3}{2}x=5$; $\frac{3}{2}x=4$, откуда $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

— $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}x$; придай $\frac{1}{3}x$ выдетъ $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{7}{12}x$, вычти $\frac{1}{3}$ будетъ $\frac{7}{12}x=\frac{1}{6}$, умножь на 12 и получится $7x=2$. и $x=\frac{2}{7}$

Также $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, придай $\frac{2}{3}x$, выдетъ $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$, вычти $\frac{1}{4}$ будетъ $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4}$ умножь на 6 получится $7x=7\frac{1}{2}$, раздѣли на 7, и будетъ $x=1\frac{1}{14}$ или $x=\frac{15}{14}$.

582.

Ежели найдешь такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное число въ знаменателѣ дроби содержится, то должно тогда сію дробь изключить изъ уравненія умноживъ оное на помянутаго знаменателя.

Такъ когда найдется $\frac{100}{x}-8=12$
то придай 8, и выдетъ $\frac{100}{x}=20$,
умножь на x — $100=20x$,
раздѣли на 20 будетъ $x=5$.
Пусть еще будетъ $\frac{5x+3}{x-1}=7$,

умножь

умножь на $x-1$, выдетъ $5x+3=7x-7$,
вычти $5x$, будетъ $3=2x-7$,
придай 7, выдетъ $10=2x$, и слѣд. $x=5$.

583.

Иногда въ уравненіи попадаются также и коренные знаки, но уравненіе не смотря на то надлежитъ до первой степени какъ напр. когда ищется число x меньше 100 такое, чтобъ квадратной корень изъ $100-x$ равенъ былъ 8, или чтобъ $\sqrt{(100-x)}=8$, то возми съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ $100-x=64$, придай x, выдетъ $100=64+x$, вычти 64, останется $x=36$, или можно бы было въ семъ случаѣ поступить и такимъ образомъ, когда $100-x=64$, то вычти 100, и останется $-x=-36$, умножь на -1, произойдетъ $x=36$.

584.

Иногда неизвѣстное число x находится въ показателѣ, какіе примѣры мы уже выше сего видѣли, и въ семъ случаѣ должно

должно прибѣжище имѣть къ логарифмамъ.

Такъ когда найдется $2^x = 512$, то берутся съ обѣихъ сторонъ логариѳмы, и будетъ x лог. $2 =$ лог. 512, раздѣли на лог. 2 выдетъ $x = \frac{\text{лог. } 512}{\text{лог. } 2}$, что по таблицамъ найдется такъ:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300}$$ слѣд. $x = 9$

пусть будетъ $5 . 3^{2x} - 100 = 305$, то придай 100, и будетъ $5 . 3^{2x} = 405$, раздѣли на 5, выдетъ $3^{2x} = 81$, взявъ логарифмы $2x$ лог. $3 =$ лог. 81, раздѣли на 2 лог. 3 и выдетъ $x = \frac{\text{лог. } 81}{2 \text{ лог. } 3}$ или $x = \frac{\text{лог. } 81}{\text{лог. } 9}$.

По таблицамъ будетъ $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$, по чему $x = 2$.

ГЛАВА

ГЛАВА III.

О рѣшенiи нѣкоторыхъ принадлежащихъ сюда вопросовъ.

585.

Вопросъ : раздѣли число 7 на 2 части такъ, чтобъ большая часть была 3мя больше нежели меньшая.

Пусть будетъ большая часть $= x$, то меншая $= 7 - x$, и по обстоятельству вопроса должно быть $x = 7 - x + 3$, или $x = 10 - x$, придай x, будетъ $2x = 10$, раздѣли на 2, найдется $x = 5$.

Отвѣтъ: большая часть $= 5$, а меншая $= 2$.

Тоже.

Общей вопросъ. Раздѣлить a на двѣ части такъ, чтобъ большая часть превышала меньшую числомъ b?

Положи большую часть $= x$, то будетъ меншая $= a - x$; чего ради $x = a - x + b$; придай съ обоихъ сторонъ x, и будетъ $2x = a + b$, раздѣли на 2, получится $x = \frac{a+b}{2}$

Тоже.

Второе рѣшеніе. Пусть будетЪ большая часть $=x$, и когда она меньшую часть превышаетЪ числомЪ b, то меньшая часть, числомЪ b будетЪ меньше большей, и по сему меньшая часть $=x-b$, обѣ сіи части вмѣстѣ должны составить число a, почему $2x-b=a$, придай b, и будетЪ $2x=a+b$, раздѣли на 2, выдетЪ $x=\frac{a+b}{2}$ большая часть, а меньшая $=\frac{a+b}{2}-b$ или $\frac{a+b}{2}-\frac{2b}{2}$ или $\frac{a-b}{2}$.

586.

ВопросЪ. Послѣ отца осталось три сына и 1600 рейхсталеровЪ денегЪ, а по оставленной имЪ духовной старшей сынЪ долженЪ взять изЪ сей суммы 200 талеровЪ больше средняго, средней 100 талеровЪ больше нежели меньшей сынЪ, спрашивается сколько каждой изЪ нихЪ возметЪ?

Положи наслѣдственную часть третьяго сына $=x$, то будетЪ часть втораго

раго $=x+100$, перваго $=x+300$, и всѣ сіи три части сложенныя вмѣстѣ должны дѣлать 1600 талеровъ, чего ради $3x+400=1600$, вычти 400, и будетъ $3x=1200$, раздѣли на 3 выдетъ $x=400$.

Отвѣтъ. Третій сынъ возметъ 400, второй 500, а первой 700 талеровъ.

587.

Вопросъ. По смерти отца осталось 4 сына и 8600 талеровъ, а по завѣту покойнаго деньги сіи между сыновьями должны быть раздѣлены такъ, чтобъ первой сынъ взялъ въ двое больше нежели второй безъ 100 талеровъ; второй въ трое больше нежели третей безъ 200 талер.; 3тей въ четверо больше нежели четвертой безъ 300 талеровъ, ищется сколько каждой взялъ?

Наслѣдственная часть четвертаго будетъ x, третьяго $4x-300$, втораго $12x-1100$, перваго $24x-2300$, и когда сумма всѣхъ сихъ частей должна со-

ставлять 8600 талеровЪ, то получимЪ мы уравненіе:

$41x-3700=8600$, придай 3700, и выдетЪ $41x=12300$, раздѢли на 41, частное дастЪ $x=300$.

ОтвѢтЪ. 4 той сынЪ возметЪ 300 талер., 3 тей 900 талер., 2 рой 2500 талер., первой 4900 талеровЪ.

588.

ВопросЪ. НѢкто по смерти своей оставилЪ 11000 талеровЪ, жену, двухЪ сыновей и трехЪ дочерей, кои оставшееся имѢніе должны по силѢ духовной раздѢлить такЪ, чтобЪ жена покойнаго взяла вдвое больше сына, сынЪ вЪ двое больше нежели дочь, спрашивается сколько каждому изЪ нихЪ достанется?

НаслѢдственную часть одной дочери положи $=x$, часть одного сына будетЪ $=2x$, и часть вдовы $=4x$; слѢдовательно все наслѢдство будетЪ $3x+4x+4x$, или $11x=11000$; раздѢли на 11, выдетЪ $x=1000$. ОтвѢтЪ. Одна дочь получитЪ 1000 талер.

одинЪ

	одинъ сынъ — —	2000	— —
	а мать возметъ —	4000	— —
слѣд.	3 дочери возмутъ	3000	
	2 сына ———————	4000	
	мать ———————	4000	
	сумма =	11000	талер.

589.

Вопросъ. Одинъ отецъ оставилъ по смерти своей трехъ сыновей, которые оставшееся послѣ него имѣніе должны раздѣлить между собою такъ, чтобъ первой сынъ взялъ 1000 талеровъ, меньше нежели половина всего наслѣдства, второй 800 талеровъ меньше нежели треть всего наслѣдства, третей 600 талеровъ меньше четвертой доли всего наслѣдства, спрашиваетея сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи все наслѣдство $=x$

то первой сынъ взялъ $\frac{1}{2}x-1000$

второй — — — — $\frac{1}{3}x-800$

третей ——————— $\frac{1}{4}x-600$

Слѣдовательно всѣ три сына взяли $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, которая сумма должна быть равна всему наслѣдству x, и такъ уравненіе будетъ $\frac{13}{12}x - 2400 = x$
вычти x и будетъ $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$
придай $2400 - - \frac{1}{12}x = 2400$
помножь на 12, $x = 28800$.

Отвѣтъ. Всѣ наслѣдство было 28800 реихст. изъ чего

первой сынъ взялъ		13400
второй	– – – –	8800
третей	– – – –	6600
Всѣ три	=	28800 талеровъ.

590.

Вопросъ. Оставшіеся по смерти отца 4 сына наслѣдство ихъ между собою дѣлятъ такъ, что первой взялъ 3000 меньше половины всего наслѣдства, другой 1000 меньше нежели $\frac{1}{3}$ наслѣдства, третій точно $\frac{1}{4}$ всего наслѣдства, четвертой 600 талеровъ и еще $\frac{1}{5}$ наслѣдства, спрашивается, сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи

Положи все наслѣдство $=x$
то взялъ первой $\frac{1}{2}x-3000$
второй $\frac{1}{3}x-1000$
третей $\frac{1}{4}x$
четвер. $\frac{1}{5}x+600$
всѣ 4 вмѣстѣ возмутъ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x$ -3400, что должно быть $=x$, чего ради уравненіе
будетъ $\frac{77}{60}x-3400=x$
вычти x и будетъ $\frac{17}{60}x-3400=0$
придай 3400 —— $\frac{17}{60}x=3400$
раздѣли на 17 —— $\frac{1}{60}x=200$
умножь на 60 —— $x=12000$
Отвѣтъ. Все наслѣдство было 12000 тал. изъ коего первой сынъ возметъ 3000 тал.
— — — второй — — — — 3000
— — — третей — — — — 3000
— — — четвертой — — — 3000

591.

Вопросъ. Найти число, къ которому ежели придастся его половина, сумма бы столько превышала 60, сколько самое число не достаетъ до 65?

Пусть будетъ искомое число $=x$, то будетъ
$x+\frac{1}{2}x-60=65-x$
придай, x выдетъ $\frac{5}{2}x-60=65$
придай 60 - - - $\frac{5}{2}x=125$
раздѣли на 5 — $\frac{1}{2}x=25$
умножь на 2 — $x=50$
Отвѣтъ. Искомое число есть 50.

592.

Вопросъ. Раздѣлить число 32 на двѣ части такъ, что ежели меньшая часть раздѣлится на 6, а большая на 5, сумма бы частныхъ равна была 6?

Пусть меньшая часть будетъ $=x$, то большая $=32-x$ меньшая часть раздѣленная на 6, даетъ $\frac{x}{6}$, а большая раздѣленная на 5, въ частномъ даетъ $\frac{32-x}{5}$, чего ради будетъ $\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$
умножь на 5, выдетъ $\frac{5}{6}x+32-x=30$
или $-\frac{1}{6}x+32=30$,
придай $\frac{1}{6}x$, будетъ $32=30+\frac{1}{6}x$,
вычти 30 - - — $2=\frac{1}{6}x$
умножь на 6 - - $x=12$.
Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ 12, а большая $=20$.

593.

593.

Вопросъ. Сыскать число, которое ежели умножится на 5, произведеніе столькобъ не доставало до 40, чѣмъ самое число меньше 12?

Положи искомое число $=x$, котораго недостатокъ до 12 есть $12-x$, и числа самаго умноженнаго на 5, то есть, $5x$ недостатокъ до 40 есть $40-5x$, что должно быть равно $12-x$;
чего ради $40-5x=12-x$,
придай $5x$, то будетъ $40=12+4x$,
вычти 12 — — — — $28=4x$,
раздѣли на 4 — —— $x=7$,
Отвѣтъ: искомое число есть 7.

594.

Вопросъ. Число данное 25 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобъ большая часть была въ 49 разъ больше меньшей?

Пусть будетъ меньшая часть $=x$, то большая $=25-x$; и сію большую часть раздѣливъ на меньшую, въ част-

номЪ должно выпти 49; чего ради
$\frac{25-x}{x}=49$

Помножь на x и выдетЪ $25-x=49x$,
придай x - - - - $25=50x$,
раздѢли на 50 и будетЪ $x=\frac{1}{2}$.

ОтвѢтЪ. Меньшая часть будетЪ $=\frac{1}{2}$, а большая $=24\frac{1}{2}$, которую когда раздѢлишь на $\frac{1}{2}$, то есть, помножишь на 2, выдетЪ 49.

595.

ВопросЪ. Данное число 48, раздѢлить на 9 частей такЪ, чтобЪ каждая часть послѢдующая, превышала свою предЪидущую $\frac{1}{2}$?

Пусть будетЪ первая и самая меньшая часть x, то вторая будетЪ $x+\frac{1}{2}$, третья $x+1$, 4тая $x+1\frac{1}{2}$ и такЪ далѢе, понеже части сіи дѢлаютЪ прогрессію ариѳметическую, которой первой членЪ $=x$, разность $\frac{1}{2}$, почему 9той членЪ будетЪ $x+4$, кЪ которому приложивЪ первой членЪ x и сумму $2x+4$ умноживЪ на число членовЪ 9, произойдетЪ $18x+36$ двойная сумма прогрессіи,

слѢд.

слѣд. самая сумма будетъ $9x+18$, которая должна быть равна 48, по чему $9x+18=48$

вычти 18, и будетъ $9x=30$,

раздѣли на 9 - - $x=3\frac{1}{3}$.

Отвѣтъ. Первая часть будетъ $3\frac{1}{3}$, а всѣ 9 частей суть такіе $\overset{1}{3\frac{1}{3}}+\overset{2}{3\frac{5}{6}}+\overset{3}{4\frac{1}{3}}+\overset{4}{4\frac{5}{6}}+\overset{5}{5\frac{1}{3}}+\overset{6}{5\frac{5}{6}}+\overset{7}{6\frac{1}{3}}+\overset{8}{6\frac{5}{6}}+7\frac{1}{3}$, коихъ всѣхъ сумма $=48$.

596.

Вопросъ. Сыскать ариѳметическую прогрессію, которой первой членъ $=5$ послѣдней $=10$, сумма $=60$? Здѣсь не дано ни разности ни числа членовъ прогрессіи; но поелику изъ перваго и послѣдняго членовъ можно бы было найти сумму всѣхъ, ежели бы число членовъ извѣстно было, то положи оное $=x$, сумма прогрессіи будетъ $\frac{15}{2}x=60$, раздѣли на 15, будетъ $\frac{1}{2}x=4$ умножь на 2, выдетъ $x=8$. Когда число членовъ $=8$, то положи разность оныхъ $=z$, по сему будетъ второй членъ $=5+z$, третей $=5+2z$, осьмой $=5+7z$, которой долженъ быть 10,

слѣдо-

слѣдовательно $5 + 7z = 10$,
вычти 5 - - $7z = 5$,
раздѣли на 7 — $z = \frac{5}{7}$.

Отвѣтъ. Разность прогрессіи есть $\frac{5}{7}$, а число членовъ 8, чего ради самая прогрессія будетъ:

$$\overset{1}{5} + \overset{2}{5\tfrac{5}{7}} + \overset{3}{6\tfrac{3}{7}} + \overset{4}{7\tfrac{1}{7}} + \overset{5}{7\tfrac{6}{7}} + \overset{6}{8\tfrac{4}{7}} + \overset{7}{9\tfrac{2}{7}} + \overset{8}{10}$$, коихъ сумма $= 60$.

597.

Вопросъ. Сыскать число, которое ежели умножится на 2, изъ произведенія вычтется 1, изъ удвоеннаго остатка вычтется еще 2, и остатокъ раздѣлится на 4, чтобъ въ частномъ вышло число единицею меньше искомаго?

Пусть будетъ искомое число x, умножь на 2, выдетъ $2x$, вычти изъ сего 1, останется $2x - 1$, сей остатокъ умножь на 2, будетъ $4x - 2$, вычти 2, останется $4x - 4$, сей остатокъ раздѣли на 4, частное число $= x - 1$, что должно быть 1 меньше нежели x.

Посему

Посему $x-1=x-1$, сїе показываетъ намъ, что x совсѣмъ опредѣлить не льзя, но мѣсто его каждое число по изволенїю брать можно.

598.

Вопросъ. Нѣкто купилъ нѣсколько локтей сукна давъ за каждые 5 локтей 7 талеровъ, продаетъ опять и беретъ за каждые 7 локтей 11 талеровъ, отъ всего сукна барыша получаетъ 100 талер. Спрашивается сколько было всего сукна?

Положимъ что сукна было x локтей, и сперва смотрѣть должно, сколько оно въ покупкѣ стоило, что по слѣдующей тройной посылкѣ сыщется:

5 локтей стоятъ 7 талер., что стоятъ x локтей? Отвѣтъ $\frac{7}{5}x$ талера, столько денегъ выдалъ онъ за сукно. Теперь посмотримъ, сколько онъ за него взялъ, по сему тройному правилу 7 локтей стоятъ въ продажѣ 11 талер. что будутъ стоять x локтей? Отвѣтъ.

^{11}x

$\frac{11}{7}x$ талер.; и сїя будетъ взятая за сукно сумма, которая 100 талерами больше нежели выданная, чего ради уравненїе будетъ $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$,
вычти $\frac{7}{5}x$, останется $\frac{6}{35}x = 100$,
умножь на 35, выдетъ $6x = 3500$,
раздѣли на 6, будетъ $x = 583\frac{1}{3}$.
Отвѣтъ. Слѣдовательно всего сукна было $583\frac{1}{3}$ локтя, которые куплены за $816\frac{2}{3}$ талера, и потомъ проданы за $916\frac{2}{3}$ талера, почему барышь будетъ 100 талеровъ.

599.

Вопросъ. Нѣкто купилъ за 140 талеровъ 12 кусковъ сукна, въ семъ числѣ были 2 куска бѣлые, 3 черные и 7 синихъ; кусокъ чернаго сукна стоитъ 2 талера больше нежели бѣлаго, а синяго каждой кусокъ стоитъ 3 талера больше нежели чернаго, спрашивается сколь дорого каждое изъ нихъ?

Положи, что кусокъ бѣлаго сукна стоитъ x, и слѣд. 2 куска бѣлаго стоятъ будутъ $2x$ талер:.

Кусокъ

Кусокъ чернаго стоять будетъ $x+2$, слѣдов. 3 куска чернаго стоятъ $3x+6$ талеровъ.

Кусокъ синяго стоитъ $x+5$, слѣд. 7 кусковъ синяго стоятъ $7x+35$ талер.

Всѣ 12 кусковъ стоятъ $12x+41$; въ самомъ же дѣлѣ даны они 140 талер., чего ради получимъ мы

уравненіе $12x+41=140$,
вычти 41, останется $12x=99$,
раздѣли на 12, будетъ $x=8\frac{1}{4}$.

Отвѣтъ. Кусокъ бѣлаго сукна стоитъ $8\frac{1}{4}$ талер.
чернаго - - - $10\frac{1}{4}$
синяго - - - $13\frac{1}{4}$

600.

Вопросъ. Нѣкто купилъ мушкатныхъ орѣховъ, и говоритъ, что цѣна 3хъ орѣховъ столько же превосходитъ 4 гроша, сколько цѣна 4хъ орѣховъ превышаетъ 10 грошей, спрашивается сколь дороги они были?

Говори когда 3 орѣха стоятъ $x+4$ гроша, то 4 орѣха стоять будутъ $x+10$ грошей

грошей ; по тройномужъ правилу найдется , сколько 4 орѣха по первому положенію стоять будутъ, т. е. 3 орѣха стоятъ $x + 4$ грош. $=$ 4 орѣх. Отвѣтъ. $\frac{4x + 16}{3}$, и такъ будетъ, $\frac{4x + 16}{3} = x + 10$

или $4x + 16 = 3x + 30$,

вычти, $3x$ останется $x + 16 = 30$,

вычти 16 будетъ $x = 14$.

Отвѣтъ. 3 орѣха стоятъ 18 грошей, а 4 стоятъ 24 гроша ; слѣд. одинъ орѣхъ стоитъ 6 грошей.

601.

Вопросъ. Нѣкто имѣетъ 2 серебреныхъ стакана и одну крышку : первой стаканъ вѣситъ 12 лотовъ , но когда положится на него крышка , то вѣситъ онъ въ двое больше противъ другаго , естьли же наложится крышка на другой стаканъ , то вѣситъ онъ въ трое больше противъ перваго, спрашивается сколь тяжелы крышка и другой стаканъ ?

Положи что крышка вѣситъ x лотовъ, то первой стаканъ вмѣстѣ съ крышкою тянутъ

тянетъ $x+12$ лотовъ, и понеже сей вѣсъ въ двое больше противъ другаго стакана, то другой стаканъ вѣситъ $\frac{1}{2}x+6$ лотовъ; и когда наложится на нево крышка, то вѣситъ онъ $\frac{5}{2}x+6$ лот., что должно быть 3. 12 лотовъ или 36; откуда получится уравненіе $\frac{3}{2}x+6=36$ или $\frac{3}{2}x=30$, и $\frac{1}{2}x=10$, слѣд. $x=20$ Отвѣтъ. Крышка вѣситъ 20 лотовъ и другой стаканъ 16.

602.

Вопросъ. Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя двухъ сортовъ монеты, перваго сорта на одинъ талеръ идетъ *a* монетъ, а другаго на тотъ же талеръ идетъ *b* монетъ. Нѣкто желаетъ у нево взять на талеръ *c* монетъ, спрашивается сколько обмѣнщикъ долженъ ему дать изъ каждаго сорта?

Положимъ что перваго сорта даетъ ему обмѣнщикъ *x* монетъ, слѣд. другаго $c-x$, но понеже оные *x* монетъ равны $\frac{x}{a}$ талер. ибо

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$; а $c-x$ монетЪ равны $\frac{c-x}{b}$ талер. ибо $b : 1 = c-x : \frac{c-x}{b}$ слѢд должно быть $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, или $\frac{bx}{a} + c - x = b$, или $bx + ac - ax = ab$, потомЪ $bx - ax = ab - ac$; слѢдов. $x = \frac{ab-ac}{b-a} = \frac{a(b-c)}{b-a}$,

отсюда будетЪ $c - x = \frac{bc-ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$

ОтвѢтЪ. Перваго сорта даетЪ обмѢнщикЪ на талерЪ $\frac{a(b-c)}{b-a}$ монетЪ, а другаго $\frac{b(c-a)}{b-a}$.

ПримѢчаніе. Сіи оба числа легко можно найти по тройному правилу; первое находится $b-a : b-c = a : \frac{ab-ac}{b-a}$, другое $b-a : c-a = b : \frac{bc-ba}{b-a}$. При семЪ примѢчать надлежитЪ, что b больше нежели a, и c менше нежели b, а больше нежели a, какЪ самое дѢло требуетЪ.

603.

ВопросЪ ОдинЪ обмѢнщикЪ имѢетЪ у себя два сорта денегЪ, перваго сорта идутЪ 10 монетЪ на талерЪ, другаго 20, а требуетЪ у нево нѢкто 17 мо-

нетЪ

нетъ на талеръ, спрашивается сколько получитъ онъ изъ каждаго сорта?

Въ семъ случаѣ $a=10$, $b=20$, $c=17$, откуда выдутъ сіи тройныя правила:

I. 10:3=10:3, слѣд. перваго сорта возметъ 3; II. 10:7=20:14, другаго возметъ онъ 14.

604.

Вопросъ. Нѣкто оставилъ по смерти своей нѣсколько дѣтей и имѣніе, которое дѣти дѣлятъ между собою такъ, что первой изъ нихъ беретъ 100 талер. и еще дѣсятую часть остальнаго имѣнія.

Второй беретъ	200 талер.	и сверьхъ того всегда 10 тую часть остальнаго имѣнія.
третей - - -	300	
четвертой - -	400	

и такъ далѣе, и по семъ дѣлежѣ находится, что все имѣніе раздѣлено было равно между ими; спрашивается сколь велико было имѣніе, сколько дѣтей было, и сколько каждой изъ нихъ взялъ?

Сей вопросъ совсѣмъ особливаго роду, и для того онъ достоинъ примѣчанія.

нія. Дабы его удобнѣе разрѣшить можно было, то положи все наслѣдство $=z$ талерамъ; и понеже всѣ дѣти берутъ по ровну, то положи одного часть $=x$, откуда видно что число дѣтей было $\frac{z}{x}$, и посему учредимъ мы рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

дѣл. деньги	дѣти	каждаго часть	разности
z	первой	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	второй	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	
$z-2x$	третей	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	
$z-3x$	четвер.	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	
$z-4x$	пятой	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$=100-\frac{x-10}{10}$
$z-5x$	шестой.	$x=600+\frac{z-5x-600}{10}$	
$z-6x$	седьмой	$x=700+\frac{z-6x-700}{10}$	
$z-7x$	осьмой	$x=800+\frac{z-7x-800}{10}$	

и такъ далѣе

Въ послѣднемъ столбцѣ поставлены разности, которыя происходятъ, когда каждаго часть вычтешь изъ наслѣдственной части слѣдующаго; но понеже всѣ сіи части равны между собою, то каждая изъ сихъ разностей должна быть $=0$, и когда по щастію нашлось, что всѣ помянутыя разности равны между собою, то довольно одну изъ нихъ положить $=0$, откуда получимъ мы сіе уравненіе: $100 \frac{-x-100}{10} = 0$, умножь на 10, и будетъ $1000 - x - 100 = 0$, или $900 - x = 0$ слѣд. $x = 900$.

Отсюда знаемъ уже мы, что каждаго наслѣдственная часть $=900$ талер.; возми теперь одно которое нибудь уравненіе въ 3 емъ столбцѣ, то первое будетъ $900 = 100 \frac{+z-100}{10}$, изъ котораго z найти надобно; чего ради помножь его на 10, и будетъ $9000 = 1000 + z - 100$, или $9000 = 900 + z$, слѣд. $z = 8100$ и $\frac{z}{x} = 9$.

ОтвѢтъ. Число дѣтей было 9, оставленное имѣніе 8100 талер. изъ коего каждой взялъ 900 талеровъ.

ГЛАВА IV.

О разрѣшеніи двухъ или больше уравненій первой степени.

605.

Часто случается, что 2 или больше неизвѣстныхъ чиселъ, означенныхъ буквами x, y, z и протч. въ выкладку входятъ, и тогда по числу неизвѣстныхъ количествъ, въ задачѣ предложенныхъ, столько же требуется и уравненій, по которымъ каждое неизвѣстное число опредѣлить должно. Здѣсь станемъ разсматривать мы только такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное число не больше, какъ первой степени находится; притомъ гдѣ также ни одно ни другое не помножено, такъ что каждое уравненіе имѣть будетъ видъ $az + by + cx = d$.

606.

606.

И такѣ начнемѣ мы отѣ двухѣ уравненій, изѣ коихѣ два неизвѣстныя числа x и y опредѣлять станемѣ; и дабы сїе вообще показать, то пусть будутѣ данныя уравненія I) $ax+by=c$ II) $fx+gy=h$,

гдѣ буквы a, b, c, и f, g, h положены мѣсто извѣстныхѣ количествѣ, и спрашивается, какимѣ образомѣ изѣ сихѣ двухѣ данныхѣ уравненій опредѣлить неизвѣстныя числа x и y.

607.

Самой легкой кѣ тому способѣ, изѣ каждаго уравненія опредѣлить величину одного неизвѣстнаго числа какѣ напр. x, потомѣ уравнивѣ обѣ сїи величины между собою, получишь одно уравненїе, вѣ которомѣ одно только неизвѣстное число y находится, которое по вышепоказаннымѣ правиламѣ опредѣлить можно, а нашедѣ y положи только вмѣсто его самого найденную величину

чину вЪ которомЪ нибудь изЪ данныхЪ уравненій, и получишь x.

608.

ВЪ силу сего правила изЪ перваго уравненія найдется $x=\frac{c-by}{a}$, а изЪ другаго $x=\frac{h-gy}{f}$, уравняй обѢ сіи величины числа x, и получишь $\frac{c-by}{a}=\frac{h-gy}{f}$, умножь на a и будетЪ $c-by=\frac{ha-agy}{f}$; умножь на f получится $cf-fby=ha-agy$, придай agy произойдетЪ $fc+agy-fby=ah$, вычти fc будетЪ $agy-fby=ah-fc$ или $(ag-fb)y=ah-fc$, раздѢли на $ag-fb$, выдетЪ $y=\frac{ch-fc}{ag-fb}$; и ежели сію величину количества положимЪ вЪ одну изЪ найденныхЪ для x мѢсто y, то получится x.

Возми первую, и будетЪ $-by=\frac{-abh+fbc}{ag-fb}$

$$c-by=c-\frac{abh+fbc}{ag-fb},$$

или $\frac{acg-fcb-abh+fbc}{ag-fb}$, сіе $c-by=\frac{acg-abh}{ag-fb}$ раздѢли на a, и будетЪ $\frac{c-by}{a}=\frac{gc-bh}{ag-fb}=x$.

609.

609.

Что бы изъяснить сїе примѣромъ, то пусть будетъ заданъ сей вопросъ: сыскать два числа, которыхъ сумма $=15$, а разность $=7$?

Положи большее число $=x$, меньшее $=y$, то будетъ I) $x+y=15$, II) $x-y=7$.

Изъ перваго уравненїя найдется $x=15-y$, а изъ другаго $x=7+y$, откуда происходитъ сїе новое уравненїе

$$15-y=7+y,$$

придай y и будетъ $15=7+2y$

вычти 7 — — — — $8=2y$

раздѣли на 2, будетъ $y=4$ и $x=11$.

Отвѣтъ. Меньшее число $=4$, а большее $=11$.

610.

Сей вопросъ можно разрѣшить вообще, то есть найти два числа, коихъ сумма $=a$, а разность $=b$?

Пусть будетъ большее число $=x$, а меньшее $=y$, то будетъ I) $x+y=a$; II) $x-y=b$.

 Изъ

Изъ перваго уравненія получится $x = a - y$, а изъ другаго $x = b + y$, откуда происходитъ сіе уравненіе $a - y = b + y$; придай y и будетъ $a = b + 2y$

вычти b, выдетъ $a - b = 2y$

раздѣли на 2, будетъ $y = \frac{a-b}{2}$

и по сему $x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$

Отвѣтъ. Слѣдовательно большее число $x = \frac{a+b}{2}$, а меньшее $y = \frac{a-b}{2}$, или $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$; $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Отсюда получается слѣдующее правило: большее число равно половинѣ суммы сложенной съ половиной разности; а меньшее равно разности между половиною суммы и половиною разности.

611.

Сей вопросъ можно еще разрѣшить и такъ: когда оба уравненія суть $x + y = a$ и $x - y = b$, то сложи ихъ вмѣстѣ, и будетъ $2x = a + b$, слѣд. $x = \frac{a+b}{2}$ потомъ вычти изъ перваго уравненія второе

рое, получится $2y = a - b$ и $y = \frac{a-b}{2}$ какЪ и прежде.

612.

ВопросЪ. ЛошакЪ и оселЪ каждой несетЪ на хребтѢ своемЪ по нѢскольку мѢшковЪ, оселЪ на свою тяжесть жалуясь говоритЪ кЪ лошаку, естьли бы ты изЪ своихЪ мѢшковЪ далЪ мнѢ еще одинЪ, тобЪ у меня было вЪ двое больше твоего; начто лошакЪ отвѢтствуетЪ ему говоря, естьли бы ты изЪ твоихЪ мѢшковЪ далЪ мнѢ еще одинЪ, тобЪ было у меня вЪ трое больше твоего, спрашивается сколько мѢшковЪ имѢлЪ на себѢ каждой изЪ нихЪ?

ПоложимЪ что на лошакѢ было x мѢшковЪ; а на ослѢ y, и когда лошакЪ ослу дастЪ одинЪ мѢшокЪ, то у осла будетЪ $y+1$ мѢшокЪ, а у лошака останется $x-1$, и поелику вЪ семЪ случаѢ на ослѢ будетЪ вЪ двое больше мѢшковЪ нежели на лошакѢ, то выдетЪ $y+1 = 2x-2$.

Когда же оселЪ дастЪ лошаку одинЪ изЪ своихЪ мѢшковЪ, то у лошака будетЪ

детъ $x+1$, а у осла $y-1$ мѣшковъ, и поелику лошакъ тогда имѣетъ въ трое больше, нежели оселъ, то будетъ $x+1 = 3y-3$.

Слѣдовательно два уравненія наши будутъ I) $y+1=2x-2$; II) $x+1 = 3y-3$, изъ перваго найдется $x=\frac{y+3}{2}$, изъ втораго $x=3y-4$, откуда происходитъ сіе новое уравненіе

$\frac{y+3}{2}=3y-4$, которое умноживъ на 2 будетъ $y+3=6y-8$
вычти y получится $5y-8=3$
придай 8 выдетъ $5y=11$
слѣд. $y=\frac{11}{5}$ или $2\frac{1}{5}$, откуда $x=2\frac{3}{5}$.
Отвѣтъ. Лошакъ имѣетъ $2\frac{3}{5}$, а оселъ $2\frac{1}{5}$ мѣшка.

613.

Ежели въ вопросѣ случатся 3 неизвѣстныя количества и столькожъ уравненій, какъ напр. I) $x+y-z=8$, II) $x+z-y=9$; III) $y+z-x=10$, то подобнымъ образомъ изъ каждаго уравненія найдется величина x какъ слѣд. I) $x=8-y+z$; II) $x=9+y-z$; III) $x=y+z-10$.

Уравни

Уравни сперва первое знаменованіе x со вторымЪ, а потомЪ сЪ третьимЪ, отчего произойдутЪ сіи два уравненія I) $8+z-y=9+y-z$; II) $8+z-y=y+z-10$, ИзЪ перваго будетЪ $2z-2y=1$, а изЪ другаго $2y=18$ ʻ хпочему $y=9$; которую величину поставя вЪ предЪидущей мѢсто y даетЪ $2z-18=1$, $2z=19$ и слѢд. $z=9\frac{1}{2}$; отсюда найдется также $x=8\frac{1}{2}$.

ЗдѢсь случилось, что вЪ послѢднемЪ уравненіи буква z пропала, и для того можно было легко опредѢлить изЪ него букву y. Но ежели бы z вЪ немЪ еще остался, то было бы два уравненія между z и y, которыя бы по прежнимЪ правиламЪ рѢшить должно было.

614.

Пусть найдено будетЪ 3 слѢдующія уравненія: I) $3x+5y-4z=25$; II) $5x-2y+3z=46$; III) $3y+5z-x=62$; ищи изЪ каждаго величину x, и будетЪ I) $x=\frac{25-5y+4z}{3}$; II) $x=\frac{46+2y-3z}{5}$; III) $x=3y+5z-62$; сравняй теперь сіи три величи-

величины между собою, то I и III дастъ $\frac{25-5y+4z}{3}=3y+5z-62$, или помножа на 3 $25-5y+4z=9y+15z-186$
придай 186, и будетъ $211-5y+4z=9y+15z$
придай 5y – – – $211+4z=14y+15z$,
слѣд. изъ I и III будетъ $211=14y+11z$.
II и III дастъ $\frac{46+2y-3z}{5}=3y+5z-62$ или $46+2y-3z=15y+25z-310$, а изъ сего найдется $356=13y+28z$.
Изъ каждаго сихъ двухъ уравненій ищи величину y. I) $211=14y+11z$, вычти $11z$, останется

$$14y=211-11z \text{ и } y=\frac{211-11z}{14}$$

II) $356=13y+28z$; вычти $28z$, останется

$$13y=356-28z, \text{ и } y=\frac{356-28z}{13};$$

сіи два знаменованія буквы y уравнивъ между собою дадутъ $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$.
умножь на 13.14 будетъ $2743-143z=4984-392z$
придай $392z$, будетъ $2743+249z=4984$
вычти 2743 – – $249z=2241$, и $z=9$
отсюда найдутся $y=8$ и $x=7$.

615.

615.

Ежели бы въ задачѣ было больше 3 хъ неизвѣстныхъ чиселъ, и столько же уравненій, то рѣшеніе можно бы учинить подобнымъ прежнему образомъ, но сіе бы ввело насъ въ скучнѣйшіе выкладки.

Однако во всѣхъ сихъ случаяхъ оказываются средства, помощію которыхъ сіе рѣшеніе облегчается: сіе дѣлается вводя въ выкладку сверьхъ главныхъ неизвѣстныхъ чиселъ еще нѣкоторыя произвольныя, какъ напр. сумму ихъ всѣхъ, что легко усмотрѣть можетъ тотъ, которой въ такихъ выкладкахъ уже довольно упражнялся; на сей конецъ предложимъ мы нѣсколько примѣровъ.

616.

Вопросъ. Трое играютъ вмѣстѣ, въ первую игру проигралъ первой изъ нихъ обоимъ другимъ, столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; въ другую игру проигралъ второй первому и третьему,

сколько

сколько каждой изъ нихъ имѣетъ, въ третью игру проигралъ третей первому и второму, столько сколько каждой изъ нихъ имѣлъ, и по окончаніи игры нашлось, что всѣ они по ровному числу имѣютъ, а имянно 24 флорена, спрашивается сколько каждой изъ нихъ имѣлъ съ начала?

Положи что первой имѣлъ x флореновъ, 2 рой y флор. 3 тей z флор. сверхъ сего положи сумму всѣхъ $x+y+z=s$. И когда въ первую игру первой столько проигрываетъ, сколько протчіе два имѣютъ, первой же имѣетъ x, то оба другіе $s-x$, и такое число теряетъ первой, слѣдовательно останется у него еще $2x-s$, второй имѣть будетъ $2y$ а третей $2z$.

Чего ради по окончаніи первой игры каждаго сумма будетъ I)$2x-s$. II)$2y$; III)$2z$.

Во вторую игру проигрываетъ другой, которой теперь имѣетъ $2y$, сѣбимъ другимъ столько сколько они имѣютъ. но они имѣютъ $s-2y$, слѣд. у дру

гаго

гаго еще останется $4y-s$, другіе же оба будутъ теперь имѣть въ двое больше прежняго, слѣд. по окончаніи другой игры суммы ихъ I) $4x-2s$; II) $4y-s$; III $4z$; въ третью игру третей, которой имѣетъ $4z$, проигрываетъ обоимъ другимъ, столько, сколько они имѣютъ, то есть $s-4z$, слѣд. у третьяго останется $8z-s$, прочіе же два получатъ теперв въ двое больше, нежели они имѣли, слѣд. по окончаніи третей игры суммы ихъ будутъ I) $8x-4s$; II) $8y-2s$; III) $8z-s$. Поелику теперь каждой изъ нихъ имѣетъ 24 флорена, то будутъ у насъ три уравненія такого состоянія, что изъ перваго тотчасъ найти можно x, изъ другаго y, а изъ третьяго z, особливо когда s также намъ извѣстно, ибо при концѣ игры всѣ вмѣстѣ имѣютъ 72 флорена, что само по себѣ найдется, а выкладка будетъ слѣдующая:

I) $8x-4s=24$, или $8x=24+4s$ и $x=3+\frac{1}{2}s$

II) $8y-2s=24$, или $8y=24+2s$ и $y=3+\frac{1}{4}s$

III) $8z-s=24$, или $8z=24+s$ и $z=3+\frac{1}{8}s$;

сложи всѣ сіи величины вмѣстѣ, то получится $x+y+z=9+\frac{7}{8}s$,

и понеже $x+y+z=s$, то будетъ $s=9+\frac{7}{8}s$, вычти $\frac{7}{8}s$, останется $\frac{1}{8}s=9$ и $s=72$. Отвѣтъ. Съ начала игры первой имѣлъ 39 флор. второй 21 флор. третей 12 флор.

Изъ сего рѣшенія видно, что помощію суммы трехъ неизвѣстныхъ чиселъ, всѣ выше упомянутыя трудности изъ выкладки вышли.

617.

Сколь ни труденъ сей вопросъ быть кажется, однакожъ можно его рѣшить и безъ алгебры. Начни только его съ конца, ибо когда три игрока по окончаніи третей игры равное число денегъ имѣютъ, то есть 24 флорена каждой, притомъ въ третью игру первой и второй деньги свои удвоили, то предъ третьею игрою имѣли они суммы слѣдующіе I) 12; II) 12; III) 48.

Во

Во вторую игру первой и третей суммы свои удвоили, слѣдовательно предъ второю игрою имѣли они.
I) 6 ; II) 42 , III)24.
Въ первую игру удвоили свои деньги второй и третей, слѣд. предъ первою игрою имѣли они
I) 39 ; II) 21 ; III) 12,
столько же какъ и прежде мы нашли.

618.

Вопросъ. Два человѣка должны 29 талеровъ, у каждаго изъ нихъ есть денги, однако не столько, чтобъ одинъ которой нибудь могъ заплатить сей долгъ; чего ради первой другому говоритъ, естли ты мнѣ дашь $\frac{2}{3}$ твоихъ денегъ, то я въ состояніи буду заплатить одинъ весь долгъ. Другой ему говоритъ, ежели ты мнѣ дашь $\frac{3}{4}$ твоихъ денегъ, то я заплачу одинъ весь долгъ, спрашивается сколько у каждаго изъ нихъ было денегъ?

Положи что первой имѣлъ x талер. другой y

то вопервыхъ будетъ $x+\frac{2}{3}y=29$

и вовторыхъ – – – — $y+\frac{5}{4}x=29$;

изъ перваго найдется $x=29-\frac{2}{3}y$, а изъ втораго $x=\frac{116-4y}{5}$.

Изъ обоихъ сихъ изображеній x, выходитъ уравненіе $29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{5}$

откуду $y=14\frac{1}{2}$ и $x=19\frac{1}{3}$

Отвѣтъ. Первой имѣлъ $19\frac{1}{3}$, другой $14\frac{1}{2}$ талер.

619.

Вопросъ. Трое купили домъ за 100 талеровъ, первой проситъ у другаго $\frac{1}{2}$ его денегъ, и тогда бы онъ могъ одинъ заплатить за весь долгъ; другой проситъ у третьяго $\frac{1}{3}$ его денегъ, чтобы ему одному можно было заплатить за весь домъ; третей проситъ у перваго $\frac{1}{4}$ его денегъ, и тогда онъ въ состояніи будетъ заплатить за весь домъ, спрашивается сколько денегъ у каждаго изъ нихъ было?

Положи

положи что первой имѣлъ x, другой y, а третей z, то получатся слѣдующія уравненіи:

I) $x+\frac{1}{2}y=100$; II) $y+\frac{1}{3}z=100$; III) $z+\frac{1}{4}x=100$ и величина x найдется I) $x=100-\frac{1}{2}y$; II) $x=400-4z$,

изъ втораго уравненія x опредѣлить не льзя, двѣ же найденныя его величины даютъ уравненіе

$100-\frac{1}{2}y=400-4z$, или $4z-\frac{1}{2}y=300$, которое соединить надлежитъ со вторымъ уравненіемъ, чтобы найти оттуда y и z; а второе уравненіе было $y+\frac{1}{3}z=100$, изъ коего $y=100-\frac{1}{3}z$, а изъ уравненія $4z-\frac{1}{2}y=300$ получится $y=8z-600$; откуда выходитъ сіе послѣднее уравненіе

$100-\frac{1}{3}z=8z-600$; слѣд. $8\frac{1}{3}z=700$, или $\frac{25}{3}z=700$ и $z=84$; отсюда получится $y=100-28=72$; $x=64$.

Отвѣтъ. Первой имѣлъ 64 талер. другой 72 и третей 84 талера.

620.

Понеже въ семъ примѣрѣ въ каждомъ уравненіи больше двухъ неизвѣстныхъ чиселъ не находится, то рѣшеніе его способнѣе можетъ учиниться такъ:

Ищи изъ перваго уравненія $y = 200 - 2x$, которой чрезъ x опредѣлится, и сію найденную величину поставь во второмъ уравненіи мѣсто y; и будетъ $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, вычти 100, останется $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, или $\frac{1}{3}z = 2x - 100$; и $z = 6x - 300$, слѣд. и z опредѣленъ также чрезъ x; сію величину поставь въ третьемъ уравненіи мѣсто z, и будетъ $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, гдѣ одни только x содержатся, умножь на 4

и будетъ $25x - 1600 = 0$; слѣд. $x = 64$

$$y = 200 - 128 = 72$$

$$z = 384 - 300 = 84.$$

621.

Равнымъ образомъ поступать надлежитъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда такихъ уравненій много будетъ.

Такъ

Такъ вообще

I) $u+\frac{x}{a}=n$, II) $x+\frac{y}{b}=n$; III) $y+\frac{z}{c}=n$; IV) $z+\frac{u}{d}=n$ или изключивъ дроби

I) $au+x=an$; II $bx+y=bn$; III) $cy+z=cn$; IV) $dz+u=dn$. Въ семъ случаѣ изъ первой будетъ $x=an-au$, что поставя мѣсто x во второмъ уравненіи получится $abn-abu+y=bn$; слѣд. $y=bn-abn+abu$; сіе поставивъ мѣсто y въ третьемъ уравненіи будетъ $cbn-abcn+abcu+z=cn$, слѣд. $z=cn-bcn+abcn-abcu$, наконецъ положивъ въ четвертомъ уравненіи сію для z означенную величину, произойдетъ

$cdn-bcdn+abcdn-abcdu+u=dn$, слѣд. будетъ

$dn-cdn+bcdn-abcdn=-abcdu+u$, или

$(abcd-1)u=abcdn-bcdn+cdn-dn$

$$u=\frac{abcdn-bcdn+cdn-dn}{abcd-1}$$

$$=\frac{n(abcd-bcd+cd-d)}{abcd-1}$$

Отсюда найдутся уже прочіе величины такъ:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

622.

Вопросъ. Одинъ капитанъ имѣетъ 3 роты салдатъ; первая состоитъ изъ Швейцаровъ, другая изъ Швабовъ, а третья изъ Саксонцовъ; съ сими намѣренъ онъ осадить городъ, и въ награжденіе за то обѣщаетъ имъ дать 901 талеръ, которые онъ между ими такъ раздѣлить намѣренъ;

Каждой салдатъ изъ той роты, которая осаду начнетъ, получитъ 1 талеръ, а остальные деньги раздѣлить между протчими поровну. Но въ семъ случаѣ нашлось, что естьли бы Швейцарцы осаду начали, тобъ каждой изъ обѣихъ

обѣихъ другихъ ротъ получилъ $\frac{1}{2}$ талера. Когда же бы осаду начали Швабы, тобъ каждой изъ протчихъ получилъ $\frac{1}{3}$ талера; и наконецъ естьли бы Саксонцы оной штурмъ начали, тобъ каждой салдатъ изъ протчихъ двухъ ротъ получилъ $\frac{1}{4}$ талера, спрашивается сколько было салдатъ въ каждой ротѣ?

Положи что число Швейцаровъ было x, Швабовъ y, а Саксонцовъ z

Потомъ положи сумму всѣхъ $x+y+z = s$, ибо напередъ видѣть можно, что сею суммою выкладка облегчится. Когда осаду начнутъ дѣлать Швейцары, коихъ число x, то число обѣихъ остальныхъ $= s - x$, и когда каждой изъ первыхъ возметъ 1 талеръ, сіи напротивъ того $\frac{1}{2}$ талер., то будетъ $x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}x = 901$, или $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}s = 901$.

Равнымъ образомъ, когда осаду начнутъ Швабы, то будетъ $y + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}y = 901$, или $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}s = 901$; когда же осаждать станутъ Саксонцы, то будетъ

$z + \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}z = 901$; или $\frac{3}{4}z + \frac{1}{4}s = 901$, изъ сихъ трехъ уравненій каждую букву x, y, z, опредѣлить можно,

ибо изъ перваго получится $x = 1802 - s$

изъ втораго - - - - $2y = 2703 - s$

изъ третьяго - - - $3z = 3604 - s$,

напиши ихъ теперь другъ подъ другомъ, сыскавъ напередъ величины $6x$, $6y$, $6z$

такъ $6x = 10812 - 6s$

$6y = 8109 - 3s$

$6z = 7208 - 2s$

сложи вмѣстѣ будетъ $6s = 26129 - 11s$, или $17s = 26129$, откуда $s = 1537$, что показываетъ сумму всѣхъ людей въ 3хъ ротахъ находящихся.

Отсюда найдутся

$x = 1802 - 1537 = 265$

$2y = 2703 - 1537 = 1166$ и $y = 583$

$3z = 3604 - 1537 = 2067$ и $z = 689$.

Отвѣтъ. Въ ротѣ Швейцаровъ было 265 человѣ-

человѣкъ, въ ротѣ Швабовъ 583, а въ ротѣ Саксонцовъ было 689 человѣкъ.

ГЛАВА V.

О рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ уравненій.

623.

Квадратное уравненіе называется, въ которомъ квадратъ или вторая степень неизвѣстнаго количества находится, и сверьхъ того никакой вышшей степени нѣтъ; ибо естьли бы въ томъ же уравненіи находилась и третья степень неизвѣстнаго числа, то бы оно уже надлежало къ кубичному уравненію, котораго рѣшеніе особливыхъ правилъ требуетъ.

624.

Въ квадратномъ уравненіи три вещи примѣчать надлежитъ: вопервыхъ такіе члены, въ которыхъ неизвѣстнаго числа нѣтъ, или которые изъ извѣстныхъ только количествъ состоятъ.

Во

Во вторыхъ тѣ члены, въ которыхъ неизвѣстное число первой степени находится,

и въ третьихъ тѣ члены, въ которыхъ содержится квадратъ неизвѣстнаго количества.

Такъ когда *x* означаетъ неизвѣстное число, а буквы *a*, *b*, *c*, *d* представляютъ извѣстныя, то члены перваго рода имѣютъ форму *a*, втораго рода *bx*, и третьяго рода члены имѣютъ формулу *xx*.

625.

Выше сего показано было, что два или больше члена одного роду могутъ соединены быть въ одинъ, или почесться за одинъ членъ; такъ формула $axx - bxx + cxx$ можетъ почтена быть за одинъ членъ, и представляется $(a-b+c)xx$, потому что $a-b+c$ въ самомъ дѣлѣ извѣстное число означаетъ.

Когда такіе члены находиться будутъ по обѣимъ сторонамъ знака $=$, то видѣли мы какъ они на одну сторону

ну переносятся и въ одинъ членъ соединяются.

Такъ когда случится уравненіе $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$,

то вычти сперва $2xx$, и получится $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$,

придай $8x$, и будетъ $5x + 4 = 3xx + 11$,

вычти 11 останется $3xx = 5x - 7$

626.

Можно также всѣ члены перенесть на одну сторону знака $=$, такъ что на другой сторонѣ останется 0; причемъ примѣчать надлежитъ, что когда члены съ одной стороны знака $=$, на другую переносятся, то знаки ихъ перемѣнять надлежитъ.

Такъ прежнее уравненіе получитъ такой видъ $3xx - 5x + 7 = o$; вообще каждое квадратное уравненіе въ сей формулѣ заключаться будетъ какъ: $axx \pm bx \pm c = o$, гдѣ знакъ $\pm$ плюсъ и минусъ изъявляются, дабы чрезъ то показать,

что

что сіи члены могутъ быть иногда положительные, а иногда отрицательные.

627.

Какой бы видъ съ начала ни имѣло квадратное уравненіе, то всегда можно его привесть въ формулу, которая имѣетъ только 3 члена; такъ когда бы кто съ начала дошелъ до сего уравненія, какъ $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ex+f}{gx+h}$, то прежде всего надлежитъ изъ него изключить дробь, и для того умножь на $cx+d$ и получится $ax+b$ $\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, по сему умножь еще на $gx+h$ и будетъ

$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd.$ Сіе есть квадратное уравненіе и можетъ быть приведено въ слѣдующіе три члена, ежели они всѣ перенесутся на одну сторону и напишутся другъ подъ другомъ такъ:

$$\begin{aligned} 0 = agxx &+ bgx + bh \\ -cexx &+ ahx - fd \\ &- cfx \\ &- edx \end{aligned}$$

или что бы еще ясняе представить, то напиши $o = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - cd)x + bh - fd$.

628

Такое квадратное уравненіе, въ которомъ всѣхъ трехъ родовъ члены находятся, называется полное квадратное уравненіе, и рѣшеніе его большимъ трудностямъ подвержено; для сей причины станемъ мы сперва разсматривать такія уравненія, въ коихъ одного изъ сихъ трехъ членовъ не достаетъ. Правда ежели въ уравненіи не будетъ члена xx, то его не можно причесть къ квадратному уравненію, но къ уравненіямъ перваго рода, или ежели бы не было въ немъ члена изъ извѣстныхъ количествъ состоящаго, то оно было бы $axx + bx = o$, которое раздѣливъ на x выдетъ $ax + b = o$, которое опять принадлежитъ къ роду простыхъ уравненій.

629.

Но когда въ уравненіи не достаетъ средняго члена, содержащаго первую

спе-

степень x, то оно имѣетъ видъ $axx + c = 0$ или $axx = c$, какой бы знакъ при c ни былъ + или −, такое уравненіе называется чистое квадратное уравненіе, для того что рѣшеніе его никакой трудности не имѣетъ; ибо раздѣли его только на a, то получится $xx = \frac{c}{a}$, и взявъ съ обѣихъ сторонъ квадратные корни будетъ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$, чрезъ что уравненіе разрѣшится.

630.

Здѣсь надлежитъ разсмотрѣть три случая:

1. Когда $\frac{c}{a}$ будетъ квадратное число, коего корень дѣйствительно изъявить можно, и величина x опредѣлится тогда раціональнымъ числомъ, какое бы оно ни было, цѣлое или ломаное. Такъ изъ уравненія $xx = 144$ получится $x = 12$, а изъ $xx = \frac{9}{16}$ будетъ $x = \frac{3}{4}$.

2. Ежели $\frac{c}{a}$ будетъ не квадратное число то тогда довольствоваться должно коренным҃ъ закономъ $\sqrt{}$.

Такъ когда $xx = 12$, то будетъ $x = \sqrt{12}$, коего величину можно опредѣлить приближеніемъ, какъ уже выше сего показано было.

3 Ежели $\frac{c}{a}$ будетъ отрицательное число, то величина x будетъ совсѣмъ невозможная или мнимая, и показываетъ, что вопросъ, приведшей насъ къ сему уравненію, самъ по себѣ не возможенъ.

631.

Прежде нежели мы далѣе пойдемъ надлежитъ примѣтить, что какъ скоро изъ какого нибудь числа квадратной корень извлекать должно будетъ, то всегда имѣетъ оной двоякое знаменованіе, то есть, какъ положительное, такъ и отрицательное, какъ уже прежде упомянуто было.

Такъ ежели дойдетъ до уравненія $xx = 49$, то величина x будетъ не только $+7$, но также и -7; и для того оная всегда означается $x = \pm 7$, откуда явствуетъ, что всѣ сіи вопросы имѣютъ двоякое рѣшеніе; но во многихъ случаяхъ, гдѣ напр. спрашивается о нѣкоемъ числѣ людей, отрицательная величина мѣста уже не имѣетъ.

632.

Равнымъ образомъ и въ прежнемъ случаѣ, гдѣ только не достаетъ одинихъ извѣстныхъ чиселъ, какъ $axx = bx$, x всегда двоякое имѣетъ знаменованіе, не смотря на то что одно только остается, ежели уравненіе на x раздѣлится. Ибо ежели будетъ уравненіе $xx = 3x$, гдѣ такое x сыскать надлежитъ, чтобъ xx равенъ былъ $3x$; то учинится сіе положивъ $x = 3$, которая величина выходитъ ежели данное уравненіе раздѣлится на x. Но сверьхъ сего вопросъ рѣшится также, когда положишь $x = 0$, ибо тогда будетъ $xx = 0$ и $3x = 0$. Вообще

ще при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ примѣчать надлежитъ, что они всегда имѣютъ два рѣшенія, напротивъ того простыя не больше одного.

Изъяснимъ теперь сіи чистыя квадратныя уравненіи нѣсколькими примѣрами.

633.

Вопросъ. Сыскать такое число, котораго половина умноженная на $\frac{1}{3}$ его самаго, въ произведеніи даетъ 24?

Пусть будетъ сіе число $= x$, то произведеніе $\frac{1}{2}x$ на $\frac{1}{3}x$ должно дать 24; слѣдовательно будетъ $\frac{1}{6}xx = 24$.

Умножь на 6 выдетъ $xx = 144$, и извлекши квадратной корень получится $x = \pm 12$; ибо ежели $x = +12$, то $\frac{1}{2}x = 6$ и $\frac{1}{3}x = 4$, коихъ произведеніе $= 24$. равнымъ образомъ когда $x = -12$, то $\frac{1}{2}x = -6$ и $\frac{1}{3}x = -4$, сихъ чиселъ произведеніе будетъ также $+ 24$.

634.

Вопросъ. Ищется число, къ которому естьли приложится 5 и то же число изъ него вычтется, то сумма первая умноженная на сію разность произведетъ 96.

Пусть будетъ оное число $= x$, то $x + 5$ умноженное на $x - 5$ въ произведеніи должно дать 96, по чему уравненіе будетъ $x^2 - 25 = 96$.
Придай 25, то будетъ $x^2 = 121$, извлеки квадратн. корень, выдетъ $x = 11$, ибо $x + 5 = 16$, и $x - 5 = 6$ и $6.16 = 96$.

635.

Вопросъ. Сыскать число, которое когда придастся къ 10, и потомъ изъ 10 вычтется, сумма бы умноженная на разность произвела число 51?

Искомое число положи $= x$, то $10 + x$ на $10 - x$ умноженное должно въ произведеніи дать 51; по чему уравненіе будетъ $100 - xx = 51$, придай xx и вычти

чти 51, то выдетъ $xx = 49$, и извлекши квадратной корень найдется $x = 7$.

636.

Вопросъ. Трое имѣютъ у себя деньги, сколько разъ первой имѣетъ 7 талеровъ, столько разъ имѣетъ другой 3 талера, и сколько разъ другой имѣетъ 17 талеровъ, столько разъ третей 5 талеровъ; а когда я сумму денегъ перваго, на сумму втораго, сумму денегъ втораго на сумму третьяго, и наконецъ сумму денегъ и третьяго на сумму перваго помножу, и потомъ всѣ сіи три произведенія сложу въ одну сумму, въ суммѣ выдетъ $3830\frac{2}{3}$, спрашивается сколько у каждаго изъ нихъ денегъ было?

Положи, что у перваго было x талеровъ, и когда сказано, что сколько разъ первой имѣетъ 7 талеровъ, столько разъ другой 3 талера, то сіе значитъ тоже, что деньги перваго къ деньгамъ втораго содержатся какъ $7:3$, и такъ положи $7:3 = x$ къ деньгамъ другаго $\frac{3x}{7}$; потомъ

потомъ деньги втораго къ деньгамъ третьяго какъ 17:5, то будетъ 17:5 $= \frac{3x}{7}$ къ деньгамъ третьяго $\frac{15x}{119}$.

Теперь умножь деньги перваго x, на сумму денегъ втораго $\frac{3x}{7}$, въ произведеніи будетъ $\frac{3xx}{7}$. Потомъ деньги втораго $\frac{3x}{7}$ умножь на деньги третьяго $\frac{15x}{119}$ въ произведеніи $\frac{45xx}{833}$, наконецъ деньги третьяго $\frac{15}{119}x$ умножь на деньги перваго x выдетъ $\frac{15}{119}xx$. Сіи три произведенія $\frac{3}{7}xx + \frac{45}{833}xx + \frac{15}{119}xx$ приведенные къ одному знаменателю, дадутъ $\frac{507}{833}xx$, что должно быть равно числу $3830\frac{2}{3}$.
Чего ради положивъ $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$,
умножь на 3 и выдетъ $\frac{1521}{833}xx = 11492$,
умножь еще на 833 $1521xx = 9572836$,
раздѣли на 1521, выдетъ $xx = \frac{9572836}{1521}$,
извлеки квадратной корень и будетъ $x = \frac{3094}{39}$,
гдѣ раздѣливъ числителя и знаменателя на 13, выдетъ $x = \frac{238}{3}$ или $x = 79\frac{1}{3}$, и слѣд. $\frac{3}{7}x = 34$, а $\frac{15}{119}x = 10$.

Отвѣтъ.

ОтвѣтЪ первой имѣетЪ $79\frac{1}{3}$ талера, второй 34, третей 10 талеровЪ.

Примѣчаніе. Сію выкладку можно здѣлать еще легче, разрѣшивЪ находящіяся вЪ оной числа на ихЪ множителей, и замѣтивЪ особенно ихЪ квадраты. ТакЪ $507 = 3.169$, гдѣ 169 есть квадратЪ 13; потомЪ $833 = 7.119$, а $119 = 7.17$ слѣд. $833 = 49.17$. Но найдено $\frac{3.169}{49.17}xx = 3830\frac{2}{3}$, то умножь на 3 и выдетЪ $\frac{9.169}{49.17}xx = 11492$; сіе число разрѣши на множителей, изЪ коихЪ первой 4 тотчасЪ найдется, такЪ что $11492 = 4.2873$, число 2873 можно раздѣлить еще на 17 и будетЪ $2873 = 17.169$; по чему уравненіе наше получитЪ видЪ $\frac{9.169}{17.49}xx = 4.17.169$, которое раздѣливЪ на 169 выдетЪ $\frac{9}{17.49}xx = 4.17$, и потомЪ умноживЪ на 17.49 и раздѣливЪ на 9 выдетЪ $xx = \frac{4.289.49}{9}$, гдѣ всѣ множители суть квадратныя числа, и корень ихЪ будетЪ $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$, то же что и прежде.

637.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ наняли фактора и послали его въ Андорфъ торговать, къ чему каждой положилъ въ 10 разъ больше талеровъ, нежели сколько ихъ въ компаніи было; такимъ образомъ отправленной факторъ получилъ барыша на 100 талеровъ въ двое больше числа людей компанію составляющихъ; ежели же $\frac{1}{100}$ всего выигрыша умножишь на $2\frac{2}{9}$, то въ произведеніи выдетъ число купцовъ, спрашивается сколько ихъ всѣхъ было?

Положи число купцовъ было $= x$, и когда каждой положилъ въ компанію $10x$, то весь капиталъ былъ $10xx$ талеровъ. Факторъ выигрываетъ на 100 талеровъ $2x$ талера, слѣдовательно на весь капиталъ $10xx$ выигралъ онъ $\frac{1}{5}x^2$, и сотая часть сего выигрыша, то есть $\frac{1}{500}x^3$ умноженная на $2\frac{2}{9}$, то есть на $\frac{20}{9}$ въ произведеніи дастъ $\frac{20}{4500}x^3$ или $\frac{1}{225}x^3$ число равное числу купцовъ x.

И

И такъ уравненіе будетъ $\frac{1}{225}x^3 = x$ или $x^3 = 225x$, что кажется быть кубичное уравненіе; но поелику его раздѣлить можно на x, то выдетъ изъ него сіе квадратное $xx = 225$ и $x = 15$.

Отвѣтъ. Число всѣхъ купцовъ было 15 и каждой положилъ 150 талеровъ.

ГЛАВА VI.

О рѣшеніи смѣшенныхъ квадратныхъ уравненій.

638.

Смѣшенное квадратное уравненіе называется, въ которомъ находятся члены трехъ родовъ: первое такіе, которые содержатъ въ себѣ квадратъ неизвѣстнаго количества, какъ axx: второе, такіе въ которыхъ неизвѣстное первой степени находится, какъ bx: и напослѣдокъ такіе, кои составлены изъ извѣстныхъ чиселъ. Ежели два или больше члена одного роду соединятся въ одинъ, и

и перенесутся на одну сторону знака $=$, то форма такого уравненія будетъ $axx \mp bx + c = 0$

Какимъ образомъ изъ такихъ уравненій величина x находится, въ сей главѣ изъяснено быть должно, и къ чему имѣемъ мы два способа.

639.

Такое уравненіе помощію дѣленія можно разпорядить такъ, что первой его членъ состоять будетъ только изъ квадрата неизвѣстнаго количества xx, второй членъ оставь на той же сторонѣ, гдѣ и xx, а извѣстное число перенеси на другую сторону, отчего формула наша перемѣнится въ сію $xx + px = \pm q$, гдѣ p и q означаютъ извѣстныя какъ положительныя, такъ и отрицательныя числа. Теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ сыскать величину x; здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что естьли бы $xx + px$ былъ точной квадратъ, то и рѣшеніе бы не имѣло

ни

ни малой трудности, ибо тогдабЪ ничего больше не требовалось, какЪ только сЪ обѣихЪ сторонЪ взять квадратные корни.

640.

Но видно что $xx+px$ не точной квадратЪ; ибо прежде сего видѣли мы, что ежели корень состоитЪ изЪ двухЪ членовЪ, какЪ $x+n$, то квадратЪ его будетЪ имѣть 3 части, то есть сверьхЪ квадратовЪ каждой части еще двойное произведенїе обѣихЪ частей, такЪ что квадратЪ изЪ $x+n$ будетЪ $xx+2nx+nn$; когда же мы на одной сторонѣ имѣемЪ $xx+px$, то xx почесться можетЪ какЪ квадратЪ первой части корня, а px двойное произведенїе первой части x на вторую, слѣдов. другая часть должна быть $\frac{1}{2}p$, какЪ и вЪ самомЪ дѣлѣ квадратЪ изЪ $x+\frac{1}{2}p$ находится $xx+px+\frac{1}{4}p^2$.

641.

Поелику $xx+px+\frac{1}{4}p^2$ есть дѣйствительной квадратЪ, коего корень $x+\frac{1}{2}p$, то вЪ нашемЪ уравненїи $xx+px=q$ прибавимЪ

бавимЪ мы только сЪ обѢихЪ сторонЪ $\frac{1}{4}pp$, и получится $xx+px+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{4}pp+q$, гдѢ на одной сторонѢ стоитЪ дѢйствительной квадратЪ, а на другой только извѢстныя числа: и такЪ ежели мы сЪ обѢихЪ сторонЪ возмемЪ квадратные корни, то получится $x+\frac{1}{2}p=\surd(\frac{1}{4}p^2+q)$, вычти теперь $\frac{1}{2}p$, и будетЪ $x=-\frac{1}{2}p+\surd(\frac{1}{4}pp+q)$; а поелику каждой квадратной корень можетЪ быть какЪ положительной, такЪ и отрицательной, того ради для x найдутся двѢ величины содержащїяся вЪ формулѢ $x=-\frac{1}{2}p\pm\surd(\frac{1}{4}pp+q)$.

642.

ВЪ сей формулѢ содержится правило, по которому всѢ квадратныя уравненїи рѢшатся, и что бы не всегда нужно было повторять прежнее дѢйствїе, то довольно одно только содержанїе сей формулы имѢть вЪ памяти; а уравненїе можно разпорядить такЪ, что на одной его сторонѢ находиться будетЪ только xx, чего ради прежнее уравненїе будетЪ

имѢть

имѣть такой видъ $xx = -px + q$, изъ коего величина x означится такъ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

643.

Отсюда выводится общее правило для разрѣшенія уравненія $xx = -px + q$.

А имянно, здѣсь видно что не извѣстное число x равно будетъ половинѣ числа, которымъ x помножено на другой сторонѣ и сверьхъ того еще + или − квадратной корень изъ квадрата числа теперь объявленнаго, и изъ простаго числа третей членъ уравненія составляющаго.

Такъ когдабъ случилось уравненіе $xx = 6x + 7$ тобъ было $x = 3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4$, слѣд. обѣ величины x будутъ I) $x = 7$; II) $x = -1$.

А когда уравненіе будетъ $xx = 10x - 9$, то $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)} = 5 \pm 4$, и два знаменованія x суть $x = 9$ и $x = 1$.

644

644.

КЪ лучшему уразумѣнію сего правила можно различать слѣдующіе случаи: I) когда p будетЪ четное число II) когда p не четное; III) когда p ломанное число.

Пусть будетЪ I) p четное число, и уравненіе: такое $xx = 2px + q$, то будетЪ $x = p \pm \sqrt{(pp+q)}$. II) ежели p не четное число и уравненіе такое $xx = px + q$, откуда $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ и когда $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, и изЪ знаменателя 4 можно извлечь корень квадратной, то будетЪ:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+4q)}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{(pp+4q)}}{2},$$

645.

Ежели же III) p будетЪ дробь, то рѣшеніе учинится такЪ: пусть будетЪ квадратное уравненіе $axx = bx + c$, или $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, то по объявленному правилу $x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(bb+4ac)}}{2a}$ или $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}$ или $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a})}$. ибо когда $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$

и знаменатель квадратное число, то $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb + 4ac)}}{2a}$.

646.

Другой путь, которой насЪ ведетЪ кЪ сему же рѢшенію, состоитЪ вЪ томЪ, что бы такое смѢшенное квадратное уравненіе какЪ $xx = px + q$, преобразить вЪ другое чистое; что здѢлается введя вЪ выкладку мѢсто неизвѢстнаго числа x другое y, такЪ чтобЪ $x = y + \frac{1}{2}p$; ибо когда найдешь y, то изЪ него получится и величина x.

ТакЪ ежели $y + \frac{1}{2}p$ поставишь мѢсто x, то будетЪ $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ и $px = py + \frac{1}{2}pp$ и по сему уравненіе будетЪ $yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q$, вычти здѢсь сперва py, и будетЪ $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, вычти еще $\frac{1}{4}pp$, останется $yy = \frac{1}{4}pp + q$, и сіе есть чистое уравненіе, откуда $y = \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

Но понеже $x = y + \frac{1}{2}p$, то $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$; что уже и прежде найдено было. И такЪ здѢсь болѢе ничего не

остается

остается, какъ только сїе правило изъяснить примѣрами.

647.

Вопросъ. Найти два числа, изъ коихъ одно другое превышаетъ 6 тью, произведенїе же ихъ равно 91?

Пусть будетъ меншее число x, то большее
$x+6$, и произведенїе ихъ $xx+6x=91$, вычти $6x$, и выдетъ $xx=-6x+91$,
и по правилу показанному $x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm10$; слѣд. $x=7$, или $x=-13$.
Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенїя, по первому находится меншее число $x=7$, а большее $x+6=13$. По второму меншее число $x=-13$, а большее $x+6=-7$.

648.

Вопросъ. Найти число, изъ квадрата коего ежели вычту 9, остатокъ тѣмъ же бы превышалъ 100, чѣмъ искомое число не достаетъ до 23?

Искомое

Искомое число пусть будетъ x, то $xx-9$ превышаетъ 100 числомъ $xx-109$, и искомое число до 23 не достаетъ числомъ $23-x$, откуда происходитъ уравненіе $xx-109=23-x$

придай 109, будетъ $xx=-x+132$, и по правилу данному $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+132)}$ $=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$ слѣд. $x=11$ или $x=-12$.

Отвѣтъ. Ежели требуется отвѣтъ положительной, то искомое число $=11$, коего квадратъ уменьшенной 9тью даетъ 112, что превышаетъ 100 12тью, и найденное число 11 столько же не достаетъ до 23.

649.

Вопросъ. Найти число, котораго ежели $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ между собою умножатся, и къ произведенію придастся $\frac{1}{2}$ искомаго числа, чтобъ вышло 30?

Пусть будетъ сіе число x, то $\frac{1}{2}$ умноженная на $\frac{1}{3}$ его даетъ $\frac{1}{6}xx$, къ чему

приложивЪ $\frac{1}{2}x$ получится $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x$; что должно быть $= 30$,
умножь на 6, получится $xx + 3x = 180$
или $xx = -3x + 180$, откуда найдется
$x = -\frac{3}{2} \pm V(\frac{9}{4} + 180) = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$
слѣд. $x = 12$, или $x = -15$

650.

ВопросЪ. Найти два числа, вЪ удвоенной пропорціи, коихЪ сумму ежели сложишь сЪ ихЪ произведеніемЪ, тобЪ вышло 90?

Искомое число положа x, большее будетЪ $2x$, произведеніе ихЪ $2xx$, кЪ сему приложи сумму $3x$, выдетЪ 90.

Слѣдовательно $2xx + 3x = 90$, вычти $3x$, останется $2xx = -3x + 90$, раздѣли на 2, будетЪ $xx = -\frac{3}{2}x + 45$,
откуда $x = -\frac{3}{4} \pm V(\frac{9}{16} + 45) = -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$.
По сему x будетЪ или 6, или $-7\frac{1}{2}$.

651.

ВопросЪ. НѢкто купилЪ лошадь за не извѢстное число талеровЪ, а продаетЪ

етъ ее опять за 119 талеровъ, при чемъ получаетъ на 100 талеровъ столько выигрыша, чего вся лошадь стоила, спрашивается, сколько онъ за нее далъ?

Положи что лошадь ему стоила x талер., и понеже онъ на нее выигралъ x процентовъ, то положи что на 100 талеровъ выигрываетъ онъ x, сколько на x барыша получится? Отвѣтъ $\frac{xx}{100}$; и когда онъ барыша получилъ $\frac{xx}{100}$, а заплатилъ самъ x талер., то долженъ онъ взять за нее $x+\frac{xx}{100}$, и по тому будетъ

$x+\frac{xx}{100}=119$,

вычти x, и будетъ $\frac{xx}{100}=-x+119$,

умножь на 100, получится, $xx=-100x$
$+11900$,

откуда $x=-50\pm\sqrt{(2500+11900)}=-50$
$\pm\sqrt{14400}=-50\pm120.$

Отвѣтъ. Лошадь стоила ему 70 талеровъ, и поелику онъ выигралъ на оные 70 процентовъ, слѣд. барышь его будетъ 49 талеровъ. По чему долженъ онъ ее продать за 70+49, то есть за 119 талеровъ.

652.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ себѣ нѣсколько суконъ, одно за 2 талера, другое за 4 талер. третіе за 6 талер увеличивая всегда двумя талерами цѣну каждаго слѣдующаго сукна, а за всѣ сукна заплатилъ онъ 110 талеровъ, спрашивается сколько всѣхъ суконъ было?

Пусть число суконъ было x, и сколько онъ заплатилъ за каждое, покажетъ слѣдующее представленіе:

за 1, 2, 3, 4, 5, — — — x
платитъ 2, 4, 6, 8, 10,...$(x-1)2+2=2x$.

И что бы найти цѣну всѣхъ суконъ, то должно ариѳметическую прогрессію 2, 4, 6, 8, 10 — — $2x$ состоящую изъ x членовъ сложить въ одну сумму, чего ради по вышеобъявленному правилу сложи первой членъ съ послѣднимъ, и будетъ $2x+2$, сумму умножь на число членовъ x, въ произведеніи $2xx+2x$ произшедшую двойную сумму прогрессіи раздѣли на 2, и получится искомая сумма

про-

прогрессіи $xx+x$, которая должна быть равна 110.

Вычти x, то будетъ $xx=-x+110$ слѣд. $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+110)}$ или $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{441}{4}}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{2}=10$.

Отвѣтъ. Всѣхъ суконъ куплено было 10 кусковъ.

653.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ нѣсколько суконъ за 180 талер., и ежели бы за тѣ же деньги можно было взять еще три куска, тобъ каждой кусокъ пришелъ ему дешевлѣ 3мя талерами, спрашивается сколько всѣхъ суконъ онъ купилъ?

Число суконъ пусть будетъ x, то каждой кусокъ дѣйствительно стоилъ $\frac{180}{x}$ талеровъ, а ежели бы онъ получилъ $x+3$ куска за 180 талер. тобъ каждой кусокъ обошелся въ $\frac{180}{x+3}$ талер., которая цѣна 3мя талерами меньше, нежели самая настоящая; чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$,

умножь на x и будетъ $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$,

раздѣли на 3, выдетъ $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$,

умножь на $x+3$, получится $60x = 60x + 180 - xx - 3x$,

придай xx, будетъ $xx + 60x = 180 + 57x$

вычти $60x$, выдетъ $xx = -3x + 180$;

откуда $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)}$ или $-\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Отвѣтъ. За 180 талеровъ куплено 12 суконъ, по чему каждое стоило 15 талеровъ; естли же бы онъ взялъ 3 куска больше, то есть 15 за 180 талеровъ, тобъ каждое стоило 12 талеровъ, то есть треми меньше, нежели въ самомъ дѣлѣ.

654.

Вопросъ. Двое положили въ торгъ 100 талеровъ, первой оставляетъ деньги свои на 3 мѣсяца, а другой только на 2 въ компаніи, и каждой изъ нихъ взялъ 99 талеровъ вмѣстѣ съ капиталомъ

домъ и барышемъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ положилъ?

Ежели первой положилъ x талеровъ, то другой $100 - x$, и когда первой беретъ 99 талеровъ, то барышь его $= 99 - x$, которой онъ получилъ въ 3 мѣсяца на капиталъ x; другой беретъ также 99 талеровъ, и выигрышъ ево $= 99 - 100 + x = x - 1$, которой онъ приобрѣлъ въ 2 мѣсяца на капиталъ $100 - x$, на сей же самой капиталъ $100 - x$ въ три мѣсяца можно бы получить $\frac{3x - 3}{2}$, слѣд сіи выигрыши капиталамъ пропорціональны, то есть, перваго капиталъ содержится къ его выигрышу, такъ какъ капиталъ втораго къ своему выигрышу, такъ:

$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x - 3}{2}$ положивъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ равными будетъ $\frac{3xx - 3x}{2} = 9900 - 199x + xx$, умножь на 2, будетъ $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$,

вычти $2xx$, остан. $xx - 3x = 19800 - 398x$,

придаи $3x$ —— $xx = - 395x + 19800$;

по чему $x = -\frac{395}{2} + \frac{\sqrt{(156025}}{4} + \frac{79200)}{4}$
или $x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45.$

Отвѣтъ. По сему первой положилъ 45 талеровъ, а другой 55; 45 тью талерами въ 3 мѣсяца выигралъ первой 54 талера, и слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ получилъ прибыли 18 талеровъ.

Другой съ 55 тью талерами въ 2 мѣсяца получаетъ прибыли 44 талера, слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ досталъ 22 талера, что съ барышемъ перваго также сходно; ибо когда на 45 талер. въ 1 мѣсяцъ выигрываетъ 18 талер., то на 55 въ то же время получится 22 талера.

655.

Вопросъ. Двѣ крестьянки несутъ на рынокъ 100 яицъ, у одной больше нежели у другой; денегъ же выручаютъ поровну. Первая говоритъ другой ежели бы твои яицы были у меня, то бы выручила я 15 крейцеровъ, на что другая отвѣтствуетъ, а ежели бы твои

яицы

яицы имѣла я, тобы я за нихъ взяла $6\frac{2}{3}$ крейцера; спрашивается сколько у каждой было?

Положимъ что первая имѣла x яицъ, то другая $100-x$, чего ради ежели бы первая $100-x$ продала за 15 крейцеровъ, то поставь тройное правило

$100-x : 15 = x : \frac{15x}{100-x}$ крейцеровъ: подобнымъ образомъ надлежитъ поступать и въ другомъ случаѣ, то есть, когда другая x яицъ продать хотѣла за $6\frac{2}{3}$ крейцера, найти можно, сколько она за свои $100-x$ яицъ выручила, а имянно;

$$x : \frac{20}{3} = 100-x : \frac{2000-20x}{3x} \text{ крейцер.};$$

и поелику обѣ крестьянки выручили поровну, то будетъ у насъ уравненіе $\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$, которое умножь на $3x$ будетъ $\frac{45xx}{100-x} = 2000-20x$

умножь еще на $100-x$ получится $45xx$
$= 200000 - 4000x + 20xx$,

вычт. $20xx$ останется $25xx = 200000 - 4000x$

 раз-

раздѣли на 25, выдетъ $xx = -160x + 8000$, и слѣдовательно $x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)}$

или $x = -80 + 120 = 40$.

Отвѣтъ. У первой было 40 яицъ, а у другой 60, и каждая изъ нихъ выручила 10 крейцеровъ.

656.

Вопросъ. Двое продали нѣсколько локтей бархату, второй 3 локтя больше перваго, а выручаютъ вмѣстѣ 35 талеровъ; первой другому говоритъ, за твой бархатъ могъ бы я взять 24 талера, другой ему отвѣтствуетъ, а я бы за твой взялъ $12\frac{1}{2}$ талера; спрашивается сколько локтей каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положи что у перваго было x локтей, то у другаго $x + 3$ локтя; и когда бы первой за $x + 3$ локтя взялъ 24 талера, слѣд. свои x локтей продалъ онъ за $\frac{24x}{x+3}$ талера, и когда другой x локтей хочетъ продать за $12\frac{1}{2}$ талера, то свои $x + 3$ локтя продалъ онъ за $\frac{25x + 75}{2x}$,

и оба вмѣстѣ выручили они $\frac{24x}{x+3}$
$+\frac{25x+75}{2x}=35$,

или $\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x$,

или $\frac{48xx}{x+3}=45x-75$,

умножь на $x+3$, $48xx=45xx+60x-225$,

вычти $45xx$, $3xx=60x-225$,

или $xx=20x-75$;

откуда $x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm5$.

Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣшенія, по первому первой имѣетъ 15 локтей, а другой 18; и понеже первой 18 аршинъ хотѣлъ продать за 24 тал., то за свои 15 взялъ онъ 20 талер. другой за 15 локтей хотѣлъ взять $12\frac{1}{2}$ тал., то за свои 18 взялъ онъ 15 талер.; и оба взяли 35 тал.

По второму рѣшенію, первой имѣетъ 5 локтей, а другой 8, первой продалъ

далЪ бы 8 локтей за 24 талера, то свои 5 продалЪ за 15 талер. другой 5 локтей перваго продалЪ бы за $12\frac{1}{2}$ талер. слѣд. за свои 8 выручилЪ онЪ 20 талеровЪ, и оба вмѣстѣ 35 талеровЪ.

ГЛАВА VII.

ОбЪ извлеченіи корней изЪ многоугольныхЪ чиселЪ.

657.

Выше сего уже мы показали, какЪ многоугольныя числа находятся, и что мы тамо бокомЪ называли, то называется также и корнемЪ. Ежели корни означатся буквою x, то многоугольныя числа найдутся слѣдующія:

3угольное будетЪ $\frac{xx+x}{2}$

4 " " " " " " xx

5 угольное будетъ $\frac{3xx-x}{2}$

6 " " " " " $2xx-x$

7 " " " " " $\frac{5xx-3x}{2}$

8 " " " " " $3xx-2x$

9 " " " " " $\frac{7xx-5x}{2}$

10 " " " " " $4xx-3x$

n " " " " " $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

658.

Помощїю сей формулы не трудно для каждаго бока или корня сыскать многоугольное число, сколь бы велико число угловъ ни было, о чемъ уже и выше сего упомянуто. Естли же обратно дано будетъ многоугольное число нѣскольких сторонъ, то корень его или бокъ находить гораздо труднѣе; ибо для сего требуется рѣшенїе квадратнаго уравненїя

вненія. По чему матерія сія особливаго разсмотренія достойна.

Начнемъ сперва съ треугольныхъ, а потомъ приступимъ и къ многоугольнымъ числамъ.

659.

Данное треугольное число пусть будетъ 91, сыскать его бокъ или корень?

Положи искомой корень $= x$, то должно быть $\frac{xx+x}{2} = 91$, умножь на 2, выдетъ $xx + x = 182$, вычти x, останется $xx = -x + 182$ и слѣдоват. $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 182)} = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13$; слѣд: искомой треугольника корень $= 13$, потому что треугольникъ изъ $13 = 91$.

660.

Пусть будетъ вообще данное треугольное число a, котораго корень найти должно.

Искомой корень пусть будетъ $= x$, то $\frac{xx+x}{2} = a$, или $xx + x = 2a$, и $xx = -x + 2a$, откуда $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)}$ или $x = -\frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{2}$

Отсюда

Отсюда получаемъ мы сіе правило: умножь данное треугольное число на 8, къ произведенію придай 1, изъ суммы извлеки квадратной корень, и изъ сего вычти единицу; остатокъ раздѣли на 2, частное дастъ искомой треугольника корень.

661.

Отсюда явствуетъ, что всѣ треугольники имѣютъ сіе свойство, то есть, когда они на 8 умножатся и къ произведенію придастся 1, въ суммѣ всегда выходитъ квадратное число, какъ изъ слѣдующей таблички видно:

3 уголн.	1;	3;	6;	10;	15;	21;	28;	36 и пр.
8 разъ + 1	9;	25;	49;	81;	121;	169;	225;	289 и пр.

Естли же данное треугольное число *a* сего свойства не имѣетъ, то сіе значитъ, что оно не дѣйствительное треугольное число, или что корня его въ раціональныхъ числахъ показать не льзя.

662.

662.

По сему правилу что бы сыскать корень 3угольнаго числа 210, будетъ $a=210$, $8a+1=1681$, коего квадратной корень 41; отсюда видно, что число 210 есть дѣйствительное треугольное число, коего корень $=\frac{41-1}{2}=20$.

Ежели бы число 4 взято было какъ 3угольное число, коего бы корень найти должно было, то оной былъ бы $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, слѣд. неизвлекомой, какъ и дѣйствительной изъ сего корня 3угольникъ найдется слѣдующимъ образомъ.

Понеже $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, то $xx=\frac{17-\sqrt{33}}{2}$, къ сему приложи x, будетъ $xx+x=\frac{16}{2}=8$, и слѣд. треугольное число $\frac{xx+x}{2}=4$.

663.

Поелику четыреугольныя числа тоже самое суть что и квадратныя, слѣдовательно не имѣютъ они ни малой трудности; ибо положивъ четыреугольное число $=a$, и слѣд. $x=\sqrt{a}$, по сему ква-

му квадратные и четыреугольные корни одно значатъ.

664.

Приступимъ теперь къ пятиугольнымъ числамъ. Пусть будетъ 22 пятиугольное число, и корень его $=x$, то должно быть $\frac{3xx-x}{2}=22$ или $3xx-x=44$, или $xx=\frac{1}{3}x+\frac{44}{3}$, откуда найдется $x=\frac{1}{6}+\surd(\frac{1}{36}+\frac{44}{3})$, то есть: $x=\frac{1}{6}+\sqrt{\frac{529}{36}}=\frac{1}{6}+\frac{23}{6}=4$ слѣд. 4 есть искомой пятиугольной корень числа 22.

665.

Пусть предложенъ будетъ вопросъ: даннаго пятиугольнаго числа a сыскать корень?

Искомой корень положи $=x$, и найдется уравненіе $\frac{3xx-x}{2}=a$, или $3xx-x=2a$, или $xx=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$, откуда $x=\frac{1}{6}+\surd(\frac{1}{36}+\frac{2a}{3})$, то есть: $x=\frac{1+\surd(1+24a)}{6}$, и такъ ежели a будетъ дѣйствительной пятиугольникъ, то $24a+1$ должно быть всегда квадратное число.

Пусть будетъ напр. 330 данной пятиугольникъ, то корень его $x = \frac{1+\sqrt{921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

666.

Даннаго шестиугольнаго числа a сыскать его корень?

Положи его $= x$, то будетъ $2xx - x = a$, или $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, откуда $x = \frac{1}{4} + \sqrt{(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a)} = \frac{1+\sqrt{(1+8a)}}{4}$ и такъ когда a есть дѣйствительной шестиугольникъ, то $8a+1$ долженъ быть квадратъ. Отсюда видно, что всѣ шестиугольныя числа содержатся въ треугольныхъ, корни же ихъ отмѣннаго свойства.

Пусть будетъ напр. 6тиугольное число 1225, то корень его $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

667.

Даннаго семиугольнаго числа a, найти его бокъ или корень?

Положи искомой корень $= x$, то будетъ $\frac{5xx-3x}{2} = a$, или $5xx - 3x = 2a$, или $xx = \frac{3x}{5} + \frac{2a}{5}$, откуда $x = \frac{3}{10} + \sqrt{(\frac{9}{100} + \frac{2a}{5})}$ $=$

$= \frac{5+\sqrt{(40a+9)}}{10}$. И такЪ всѢ семиугольныя числа суть такого состоянїя, что ежели они на 40 умножатся и кЪ произведенїю придастся 9, сумма всегда должна быть квадратное число.

Пусть будетЪ напр. семиугольникЪ 2059, то корень его найдется $x = \frac{5+\sqrt{82369}}{10} = \frac{5+287}{10} = 29$.

668.

Даннаго осьмиугольнаго числа a сыскать корень x?

ВЪ семЪ случаѢ будетЪ $3xx - 2x = a$, или $xx = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$, откуда $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{a}{3})} = \frac{1 + \sqrt{(3a+1)}}{3}$

По сему всѢ осьмиугольныя числа имѢютЪ свойство такое, что когда они умножатся на 3, и кЪ произведенїю придастся 1, сумма всегда быть должна квадратное число.

Пусть будетЪ наприм. 8угольное число 3816, то корень его $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

669.

Наконецъ пусть будетъ дано n, угольное число a, сыскать его корень x? Въ семъ случаѣ будетъ $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}=a$, или $(n-2)xx-(n-4)x=2a$; или $xx=\frac{(n-4)x}{n-2}+\frac{2a}{n-2}$

откуда $x=\frac{n-4}{2(n-2)}+V\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2}+\frac{2a}{n-2}\right)$
$=\frac{(n-4)}{2(n-2)}+V\left(\frac{(n-4)^2+8a(n-2)}{4(n-2)^2}\right)$

слѣдов: $x=\frac{n-4+V(8,(n-2)a+(n-4)^2)}{2(n-2)}$

Сія формула содержитъ въ себѣ общее правило, изъ данныхъ чиселъ находить всѣ возможные многоугольные корни.

А дабы сіе изъяснить примѣромъ, то пусть дано будетъ 24 угольное число 3009, и понеже здѣсь $a=3009$, $n=24$, $n-2=22$, $n-4=20$, то будетъ корень $x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17$.

ГЛАВА

ГЛАВА VIII.

О извлеченіи квадратныхъ корней изъ биномія, или двучленнаго числа.

670.

Биномїй въ Алгебрѣ называется число изъ двухъ частей состоящее, изъ коихъ одна, или обѣ коренной знакъ при себѣ имѣютъ. Какъ $3 + \sqrt{5}$ есть биномїй, также $\sqrt{3} + \sqrt{3}$; притомъ все равно, какимъ бы знакомъ сіи двѣ части ни соединены были, то есть: или знакомъ $+$, или $-$, слѣд. $3 - \sqrt{5}$ будетъ также биномїй называться, какъ и $3 + \sqrt{5}$.

671.

Сіи биноміи особливо для того примѣчанія достойны, что при разрѣшеніи квадратныхъ уравненій такія формулы попадаются, ежели рѣшеніе не можетъ быть раціонально.

Такъ когда случится уравненіе $xx = 6x - 4$, то будетъ $x = 3 + \sqrt{5}$. Для сей причины

чины, такія формулы весьма часто попадаются въ Алгебраическихъ выкладкахъ, и мы уже выше сего показали, какимъ образомъ обыкновенныя дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія съ такими числами дѣлаются; а теперь покажемъ какимъ образомъ изъ такихъ формулъ и квадратной корень извлекать надлежитъ, ежели такое извлеченіе учинится можетъ; въ противномъ случаѣ приставляется къ ней еще коренной знакъ, то есть квадратной корень изъ $3+\sqrt{2}$ есть $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$.

672.

При семъ примѣчать надлежитъ, что квадраты такихъ биноміевъ суть также биноміи, въ коихъ одна часть раціональна.

Ибо когда ищется квадратъ изъ $a+\sqrt{b}$, то будетъ оной $(aa+b)+2a\sqrt{b}$, такъ что ежели изъ формулы $(aa+b)+2a\sqrt{b}$ потребуется опять квадратной корень, то будетъ оной $a+\sqrt{b}$, которой безспорно лучше уразумѣть можно, нежели когдабъ

когдабъ предъ прежнею формулою еще знакъ $\sqrt{}$ поставился. Равнымъ образомъ ежели формулы $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ возмется квадратъ, которой будетъ $(a+b)+2\sqrt{ab}$, то обратно изъ формулы $(a+b)+2\sqrt{ab}$ корень будетъ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, которая формула также простяе, какъ когда предъ прежнею знакъ $\sqrt{}$ поставленъ будетъ.

673.

Чего ради въ семъ случаѣ нужно только сыскать карактеръ, по которому бы всегда узнавать можно было, имѣетъ ли такой квадратной корень мѣсто или нѣтъ На сей конецъ возмемъ мы какую нибудь легкую формулу и разсмотримъ, можноли изъ биномія $5+2\sqrt{6}$ симъ образомъ найти квадратной корень.

Положи что сей корень $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, коего квадратъ $=(x+y)+2\sqrt{xy}$ и которой долженъ быть равенъ $5+2\sqrt{6}$; слѣд. раціональная часть $x+y$ должна быть $=5$, а неизвлекомая $2\sqrt{xy}=2\sqrt{6}$, откуда произходитъ $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$, и взявъ

съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ $xy=6$; и когда $x+y=5$, то $y=5-x$, которую величину положа въ уравненіе $xy=6$, выдетъ $5x-xx=6$, или $xx=5x-6$ слѣд. $x=\frac{5}{2}+\sqrt{(\frac{25}{4}-\frac{24}{4})}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$.

И такъ когда $x=3$, то $y=2$, и корень квадратной изъ $5+2\sqrt{6}$ будетъ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Имѣя здѣсь сіи два уравненія I.) $x+y=5$; II.) $xy=6$ покажемъ особливой путь, какъ, и оттуда находить x и y, которой состоитъ въ слѣдующемъ:

Понеже $x+y=5$, то возми квадраты $xx+2xy+yy=25$, и замѣть, что $xx-2xy+yy$ есть квадратъ изъ $x-y$; изъ уравненія $xx+2xy+yy=25$ вычти $xy=6$ 4 жды взятое, или $4xy=24$, то получится $xx-2xy+yy=1$, коего корень квадратной $x-y=1$, и поелику $x+y=5$, то будетъ $x=3$, $y=2$; по сему искомой корень изъ $5+2\sqrt{6}$ есть $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

675.

675.

Разсмотримъ теперь сей общей биномій $a+\sqrt{b}$. Положа квадратной его корень $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ получишь уравненіе $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, гдѣ $x+y=a$ и $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, или $4xy=b$ квадратъ изъ $x+y=a$ есть $xx+2xy+yy=aa$, вычти изъ него $4xy=b$, и будетъ $xx-2xy+yy=aa-b$, коего квадратной корень $x-y=\sqrt{(aa-b)}$, и понеже $x+y=a$, то найдется $x=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$ и $y=\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$

Слѣдовательно искомой квадратной корень изъ $a+\sqrt{b}$ будетъ $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

676.

Сія формула гораздо связняе, нежели какъ когдабъ предъ даннымъ биноміемъ $a+\sqrt{b}$ поставленъ былъ просто коренной знакъ $\sqrt{}$, то есть. $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Но оная облегчится, ежели числа a и b будутъ такого состоянія, что $aa-b$ будетъ точной квадратъ; ибо тогда $\sqrt{}$ позади кореннаго знака $\sqrt{}$ пропадетъ. Отсюда видно что только въ тѣхъ слу-

чаяхъ изъ биномія $a+\sqrt{b}$ квадратной корень извлечь можно, когда $aa-b=cc$; и тогда искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{(a+c)}{2}}+\sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$, когда же $aa-b$ не квадратное число, то квадратнаго корня способнѣе означить не льзя, какъ коренным знакомъ $\sqrt{}$.

677.

Отсюда получаемъ мы правило для способнѣйшаго означенія квадратнаго корня изъ биномія $a+\sqrt{b}$. Къ сему требуется чтобъ $aa-b$ было квадратное число, и ежели оно $=cc$, то искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{\frac{(a+c)}{2}}+\sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$; причемъ еще примѣчать надлежитъ, что квадратной корень изъ $a-\sqrt{b}$ есть $\sqrt{\frac{(a+c)}{2}}-\sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$; ибо ежели сей формулы возмется квадратъ, то оной будетъ $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$, а поелику $cc=aa-b$, то $aa-cc=b$, слѣд. сей квадратъ $=a-2\sqrt{\frac{b}{4}}=a-\frac{2\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}$.

678.

И такъ когда изъ биномія $a\pm\sqrt{b}$, должно будетъ извлечь корень квадратной

ной, то вычти квадратъ раціональной части aa изъ квадрата ирраціональной b, изъ остатка извлеки корень квадратной, которой пусть будетъ c; по сему требуемой квадратной корень $= \sqrt{\frac{(a+c)}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$.

679.

Ежели должно будетъ найти квадратной корень изъ $2+\sqrt{3}$, то будетъ $a=2$, $b=3$ и $aa-b=1$, коего корень $c=1$, слѣдоват. искомой квадратной корень $=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Пусть будетъ еще биномій $11+6\sqrt{2}$, то въ немъ $a=11$, $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$, и $b=36.2 =72$ и $aa-b=49$, слѣд. $c=7$, и квадратной корень изъ $11+6\sqrt{2}$ будетъ $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.

Найти квадратной корень изъ $11-2\sqrt{30}$: здѣсь $a=11$, $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$, $b=120$ и $aa-b=1=c$ слѣд. искомой корень $= \sqrt{6}-\sqrt{5}$.

680.

680.

Сїе правило имѣетъ также мѣсто, когда въ задачѣ случатся мнимыя или невозможныя числа.

Такъ естьли данъ будетъ сей биномій $1+4\sqrt{-3}$, то $a=1$, $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$ и $b=16.-3=-48$, $aa-b=49$; слѣд. $c=7$, и искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{4+\sqrt{-3}}=2+\sqrt{-3}$.

Пусть дано будетъ еще $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, то $a=-\frac{1}{2}$, $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, и $b=\frac{1}{4};-3=-\frac{3}{4}$; откуда $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$; и $c=1$, слѣд. искомой квадратной корень $=\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$, или $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Слѣдующей примѣръ, въ которомъ ищется квадратной корень изъ $2\sqrt{-1}$, примѣчанія достоинъ. По елику здѣсь раціональной части не находится, то $a=0$, $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$, и $b=-4$, а $aa-b=4$ слѣд. $c=2$; почему искомой корень будетъ $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, коего квадратъ $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

681.

681.

Ежели бы надлежало разрѣшить уравненіе такое, какъ $xx = a \pm \sqrt{b}$, и было бы $aa - b = cc$, то величина x нашлася бы $x = \sqrt{\frac{(a+c)}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$, что во многихъ случаяхъ имѣетъ немалую пользу.

Пусть будетъ напр. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$, то будетъ $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

682.

Сіе имѣетъ мѣсто особливо при разрѣшеніи уравненій четвертой степени, какъ $x^4 = 2axx + d$; ибо когда здѣсь положится $xx = y$, то $x^4 = y^2$, слѣд. данное уравненіе перемѣнится въ $yy = 2ay + d$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{(a^2 + d)}$; чего ради мѣсто перваго уравненія будетъ $xx = a \pm \sqrt{(a^2 + d)}$; откуда надлежитъ извлечь еще квадратной корень; понеже здѣсь $\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)}$ и $b = aa + d$, то будетъ $aa - b = -d$, и ежели $-d$ будетъ квадратъ, то есть: cc или $d = -cc$, то можно будетъ изъявить и корень. Почему пусть будетъ $d = -cc$, или дано сіе

сїе уравненїе 4 той степени $x^4 = 2axx - cc$, то величина x изЪ него найдется $x = \sqrt{\frac{(a+c)}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a-c)}{2}}$.

683.

ИзЪяснимЪ теперь сїе нѢсколькими примѢрами.

Сыскать два числа, коихЪ произведенїе равно 105, а сумма ихЪ квадратовЪ равна 274?

Положи искомыя числа x и y, то получатся тотчасЪ два уравненїя I) $xy = 105$; II) $x^2 + y^2 = 274$, изЪ перваго находится $y = \frac{105}{x}$, что положи мѢсто y, во второмЪ уравненїи будетЪ $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$, умножь на xx, и будетЪ $x^4 + 105^2 = 274 xx$, или $x^4 = 274xx - 105^2$; и естьли сїе сравнимЪ сЪ прежнимЪ уравненїемЪ, то будетЪ $2a = 274$, и $a = 137$, $-cc = -105^2$, слѢдов. $c = 105$, откуда найдется $x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4$, слѢдовательно x равно или 15, или 7, вЪ первомЪ случаѢ $y = 7$, а во второмЪ $= 15$, по чему оба искомыя числа суть 15 и 7.

684.

684.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что выкладка сія еще легче здѣлана быть можетъ; ибо когда $xx + 2xy + yy$ и $xx - 2xy + yy$ суть квадраты, притомъ какъ $xx + yy$, такъ и xy извѣстны, то послѣднее надлежитъ только удвоить, и какъ къ первому приложить, такъ изъ него и вычесть, какъ здѣсь видно: $xx + yy = 274$, приложи сперва $2xy$ и будетъ $xx + 2xy + yy = 484$ и $x + y = 22$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy = 64$ и $x - y = 8$; отсюда будетъ $2x = 30$, и $x = 15$; $2y = 14$ и $y = 7$. Подобнымъ сему образомъ можетъ разрѣшенъ быть и сей общей вопросъ. Сыскать два числа, коихъ произведеніе $= m$, и сумма ихъ квадратовъ $= n$?

Искомыя числа пусть будутъ x и y, то найдутся два слѣдующія уравненія: I) $xy = m$; II) $xx + yy = n$; $2xy = 2m$, чего ради придавъ $2xy$ выдетъ $xx + 2xy + yy = n + 2m$, и $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx - 2xy$

$+ yy$

$+ yy = n - 2m$, то $x - y = V(n - 2m)$,
откуду $x = \frac{1}{2}V(n + 2m + \frac{1}{2}V(n - 2m)$
и $y = \frac{1}{2}V(n + 2m) - \frac{1}{2}V(n - 2m)$;

685.

Пусть предложенъ будетъ еще сей вопросъ: сыскать два числа, коихъ произведеніе $= 35$, и разность квадратовъ ихъ $= 24$?

Положи большее искомое число x, а меньшее y, и выдетъ два уравненія; I) $xy = 35$; II) $x^2 - y^2 = 24$, и поелику въ прежнемъ случаѣ употребленная выгода здѣсь мѣста не имѣетъ, то поступай обыкновеннымъ образомъ, и найдется изъ перваго уравненія $y = \frac{35}{x}$, что положивъ во второмъ уравненіи мѣсто y дастъ $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, умножь на xx и будетъ $x^4 - 1225 = 24xx$ или $x^4 = 24xx + 1225$. Поелику здѣсь послѣдней членъ имѣетъ знакъ плюсъ, то прежняго уравненія здѣсь употребить не льзя, потому что $cc = -1225$, и слѣд. c было бы не возможно.

Для

Для сей притчины кладется $xx = z$ и выходитЪ $zz = 24z + 1225$, откуда $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ или $z = 12 \pm 37$, слѣдов. $xx = 12 \pm 37$, то есть $xx = 49$ или $xx = -25$; по первому знаменованію будетЪ $x = 7$ и $y = 5$; а по другому $x = \sqrt{-25}$, и $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$, или $= \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, или $= \sqrt{-49}$.

686.

ВЪ заключеніе сей главы прибавимЪ еще сей вопросЪ:

Найти два числа, коихЪ сумма, произведеніе и разность квадратовЪ равны между собою?

Большее число пусть будетЪ x, а меньшее y, то сии три формулы должны быть равны между собою I) $x + y$; II) xy; III) $xx - yy$; и ежели первая сравняется со второю, то будетЪ $x + y = xy$, отсюда ищи x; ибо $y = xy - x = x(y - 1)$, то $x = \frac{y}{y - 1}$, слѣд $\frac{yy}{y-1} = x + y$, и $xy = \frac{yy}{y-1}$, и слѣд. сумма равная произве-

денію должна быть также равна разности квадратовъ, и притомъ будетъ $xx - yy = \frac{yy}{yy-2y+1} - yy = \frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$, что прежней величинѣ $\frac{yy}{y-1}$ равно; того ради будетъ $\frac{yy}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$, раздѣли на yy и будетъ $\frac{1}{y-1} = \frac{-yy+2y}{yy-2y+1}$, по семъ умножь на $y-1$, выдетъ $1 = \frac{-yy+2y}{y-1}$, умножь еще на $y-1$, будетъ $y-1 = -yy+2y$, слѣдов. $yy = y+1$, отсюда найдется $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+1)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; чего ради $x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$; а что бы здѣсь вывесть коренной знакъ изъ знаменателя, то умножь сверьху и снизу на $\sqrt{5}+1$, и будетъ $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Отвѣтъ.

Отвѣтъ. большее искомое число $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, а меньшее $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; ихъ сумма $x+y = 2+\sqrt{5}$, произведеніе $xy = 2+\sqrt{5}$, и поелику $xx = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ и $yy = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, то разность квадратовъ $xx - yy = 2+\sqrt{5}$.

687.

Поелику показанное рѣшеніе нѣсколько трудновато, то легче можно его здѣлать симъ образомъ: положи сперва $x+y$ равно разности квадратовъ $xx - yy$, то есть: $x+y = xx - yy$; и понеже здѣсь можно раздѣлить на $x+y$, потому что $xx - yy = (x+y)(x-y)$, то получится $1 = x-y$, откуда $x = 1+y$, и слѣдовательно $x+y = 2y+1$, и $xx-yy = 2y+1$, что должно быть еще равно произведенію $xy = yy+y$; почему $yy+y = 2y+1$, откуда такъ какъ и прежде найдется $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

688.

Сїе ведетъ насъ еще къ слѣдующему вопроссу: сыскать два числа, коихъ сумма, произведенїе и сумма ихъ квадратовъ равны между собою?

Искомыя числа пусть будутъ x и y, то слѣдующїе три формулы равны между собою, то есть: I) $x+y$; II) xy; III) $xx+yy$.

Ежели первая изъ нихъ уравняется со второй, то есть, положится $x+y$ $=xy$, то найдется $x=\frac{y}{y-1}$, и $x+y$ $=\frac{yy}{y-1}$, что равно также xy, и отсюда $xx+yy=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, что положи равно $\frac{yy}{y-1}$. Умножь на $(y-1)^2$, и будетъ $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$, или $y^4=3y^3$ $-3yy$; раздѣли на yy, произойдетъ y^2 $=3y-3$ и $y=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-3)}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$,

отсю-

отсюда $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, слѣд. $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$, умножь сверьху и снизу на $1-\sqrt{-3}$, то будетъ $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$, или $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$

Отвѣтъ. Оба искомыя числа будутъ $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ и $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$; сумма ихъ $x+y=3$, произведеніе $xy=3$; и когда $xx=\frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ и $yy=\frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, то будетъ $xx+yy=3$.

689.

Сія выкладка не мало облегчиться можетъ особливымъ къ тому средствомъ, что такожде и въ другихъ случаяхъ употреблять можно; а состоитъ оно въ томъ, чтобъ искомыя числа не двумя разными буквами, но суммою и разностію двухъ другихъ изъявлено было.

Такъ въ первой задачѣ положи одно искомое число $p+q$, а другое $p-q$, сумма ихъ $=2p$, произведеніе $=pp-qq$, а

сумма ихъ квадратовъ $2pp + 2qq$; всѣ сіи три части должны быть между собою равны. Положи первую равну второй, т. е. $2p = pp - qq$, отсюда $qq = pp - 2p$. Сіе знаменованіе положи въ третьей формулѣ мѣсто qq, то будетъ $4pp - 4p$, что уравнивъ съ первой будетъ $2p = 4pp - 4p$, придай $4p$ и выдетъ $6p = 4pp$ раздѣли на p, выдетъ $6 = 4p$ слѣдов. $p = \frac{3}{2}$.

Отсюда $qq = -\frac{3}{4}$ и $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$, слѣдов. искомыя числа будутъ $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ и другое $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, какъ и прежде.

ГЛАВА IX.

О свойствѣ квадратныхъ уравненій.

690.

Изъ прежде показаннаго видно было, что каждое квадратное уравненіе двоякимъ образомъ рѣшиться можетъ, которое свойство заслуживаетъ особливое примѣчаніе,

чаніе; ибо чрезъ то и вышшихъ степеней уравненіи не мало облегчаются Чего ради разсмотримъ теперь, для чего каждое квадратное уравненіе двоякое рѣшеніе имѣетъ; поелику въ семъ важное свойство сихъ уравненій заключается.

691.

Хотя уже извѣстно, что сіе двойное рѣшеніе начало свое имѣетъ оттуда, что изъ каждаго числа квадратной корень, какъ положителной, такъ и отрицательной взятъ быть можетъ. Но поелику притчины сей при вышшихъ уравненіяхъ употребить не льзя, то не излишно будетъ, основаніе онаго показать еще инымъ образомъ, то есть: здѣсь изъяснить надобно, для чего квадратное уравненіе, какъ наприм. $xx = 12x - 35$ двоякимъ образомъ рѣшено быть можетъ, или что для x двѣ величины опредѣлены быть могутъ, изъ коихъ каждая рѣшитъ данной вопросъ. Такъ въ семъ примѣрѣ мѣсто x можно взять какъ 5, такъ и 7;

ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $xx = 12x - 35$.

692.

Для лучшаго изъясненія сего основанія, перенеси всѣ члены уравненія на одну сторону, такъ чтобъ на другой сторонѣ былъ о; почему прежнее уравненіе перемѣнится въ $xx - 12x + 35 = 0$. Причемъ требуется найти только такое число, которое естьли поставится вмѣсто x, формула $xx - 12x + 35$ была бы дѣйствительно равна о, а потомъ уже показать должно притчину, для чего сіе двоякимъ образомъ учиниться можетъ.

693.

Вся сила состоитъ въ томъ, чтобы показать, что формула $xx - 12x + 35$ можетъ почесться за произведеніе изъ двухъ множителей; какъ и дѣйствительно формула сія состоитъ изъ двухъ множителей $(x - 5)(x - 7)$; чего ради когда оная формула должна быть о; то и произведеніе $(x - 5)(x - 7)$ должно быть тако-

такожде $=0$; а произведеніе изъ сколькихъ бы множителей оно ни состояло, всегда будетъ 0, естьли только одинъ множитель $=0$; ибо сколько бы велико произведеніе изъ протчихъ множителей нибыло, когда оно на 0 помножится, всегда выдетъ въ произведеніи 0; которую истинну и при вышшихъ уравненіяхъ наблюдать надобно.

694.

Отсюда видно, что произведеніе $(x-5)(x-7)$ въ двухъ случаяхъ будетъ $=0$: первое, когда первой множитель $x-5=0$ будетъ, и второе, когда второй $x-7=0$; первое учинится положивъ $x=5$, а второе положивъ $x=7$. Изъ сего видна подлинная притчина, для чего уравненіе $xx-12x+35=0$ двумя образами рѣшиться можетъ, или для x двѣ величины опредѣлить можно, кои обѣ рѣшатъ уравненіе. Оная притчина состоитъ въ томъ, что формула $xx-12x+35$ представлена быть можетъ, какъ произведеніе изъ двухъ множителей.

695.

Сіе обстоятельство имѣетъ мѣсто при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ; ибо когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, то всегда получится такая формула, $xx - ax + b = 0$, которая равнымъ образомъ почтена быть можетъ за произведеніе изъ двухъ множителей, кои мы изобразимъ такъ: $(x-p)(x-q)$, не имѣя нужды знать, что значатъ p и q; и когда уравненіе наше требуетъ, чтобъ сіе произведеніе было 0, то извѣстно, что сіе двоякимъ образомъ учинено быть можетъ: первое когда $x = p$, а второе когда $x = q$, что значитъ обѣ величины, по которымъ уравненіе разрѣшается.

696.

Посмотримъ какіе сіи множители быть должны, что бы ихъ произведеніе точно нашу формулу $xx-ax+b$ здѣлало. Умножь ихъ самымъ дѣломъ, и получатся $xx-(p+q)x+pq$: что когда съ формулою $xx-ax+b$ тоже быть должно,

то

то видно что $p+q$ должно быть равно a и $pq=b$, откуда познаемъ мы сїе знатное свойство, что такого уравненїя, какъ $xx-ax+b=0$ обѣ величины суть такого состоянїя, что сумма ихъ равна числу a, а произведенїе $=b$, почему какъ скоро извѣстна будетъ одна величина, найдется и другая.

697.

Въ семъ случаѣ обѣ величины x имѣютъ знакъ положительной, и въ уравненїи второй членъ имѣлъ знакъ $-$, а третей $+$. Разсмотримъ теперь и тѣ случаи, когда одна или обѣ величины x знакъ отрицательной имѣютъ; первое учинится, когда оба множителя уравненїя будутъ такїя $(x-p)(x+q)$, откуда происходятъ для x двѣ величины $x=p$ и $x=-q$, и самое уравненїе будетъ $xx+(q-p)x-pq=0$, гдѣ второй членъ знакъ $+$ имѣетъ, то есть когда q больше нежели p, ежели же бы q меньше было нежели p, то бы при второмъ членѣ

нѣ стоялъ знакъ $-$; третей же членъ имѣетъ здѣсь всегда знакъ $-$.

А когда оба множителя будутъ $(x+p)(x+q)$, то обѣ величины x будутъ отрицательныя, т. е. $x=-p$, и $x=-q$; а самое уравненіе было бы $xx+(p+q)x+pq=0$, гдѣ какъ второй, такъ и третей члены знакъ $+$ имѣютъ.

698.

Отсюда познаемъ мы состояніе корней каждаго уравненія по знакамъ втораго и третьяго членовъ. Пусть будетъ уравненіе $xx \cdots ax \cdots b=0$, когда второй и третей члены имѣютъ знакъ $+$, то обѣ величины x будутъ отрицательныя; когда же второй членъ знакъ $-$, а третей $+$ имѣютъ, то обѣ величины будутъ положительныя; а ежели и третей членъ будетъ имѣть знакъ отрицательной, то одна величина будетъ положительная, а другая отрицательная, и всегда второй членъ содер-

житъ

житъ сумму обоихъ корней ; а третей ихъ произведеніе.

699.

Теперь не трудно здѣлать такое квадратное уравненіе, которое бы по изволенію двѣ данныя величины содержало ; спрашивается напр. такое уравненіе, гдѣ одна величина x былабъ 7 , а другая -3: здѣлай изъ сего простое уравненіе $x=7$ и $x=-3$, потомъ $x-7=0$ и $x+3=0$, которые суть множители требуемаго уравненія , такъ что самое уравненіе есть $xx-4x-21=0$, откуда по прежнему правилу тѣ же самыя величины для x найдутся ; ибо когда $xx=4x+21$, то будетъ $x=2\pm\sqrt{25}$, или $x=2\pm5$, и такъ $x=7$ или $x=-3$.

700.

Статься можетъ , что обѣ величины x будутъ равны между собою ; то есть , сыщи такое уравненіе , гдѣ обѣ величины $x=5$, слѣд оба множителя будутъ $(x-5)(x-5)$, и уравненіе $xx-10x+25=0$, которое одну виличину для x имѣетъ;

имѣетъ; ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $x = 5$, что покажетъ обыкновенное рѣшеніе такого уравненія. Когда $xx = 10x - 25$, то будетъ $x = 5 \pm \surd 0$, или $x = 5 \pm 0$, слѣд. $x = 5$ и $x = 5$.

701.

Особливо здѣсь примѣчать надлежитъ, что иногда оба знаменованія x будутъ мнимые или невозможные, въ которыхъ случаяхъ совсѣмъ означить не можно такой величины для x, которая бы данной вопросъ рѣшила. Напр. ежели число 10 должно будетъ раздѣлить на двѣ части, коихъ бы произведеніе было 30, то пусть будетъ одна часть $4x$, другая $= 10 - x$, а слѣд. ихъ произведеніе $10x - xx = 30$, то есть, $xx = 10x - 30$ и $x = 5 \pm \surd - 5$, которое есть мнимое или невозможное число, и даетъ знать, что заданной вопросъ невозможенъ.

702.

И такъ не отмѣнно нужно здѣсь найти знакъ, изъ коего бы узнать можно

жно было , возможно ли квадратное уравненіе или нѣтъ. На сей конецъ пусть будетъ дано сіе общее уравненіе:

$xx-ax+b=0$, то есть $xx=ax-b$, и $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-b)}$, откуда явствуетъ , что когда число b больше нежели $\frac{1}{4}aa$, или $4b$ больше нежели aa , то обѣ величины будутъ не возможны : ибо тогда должно бы извлекать квадратной корень изъ отрицательнаго числа ; но когда b меншее нежели $\frac{1}{4}aa$, или еще менше 0 , то есть отрицательное, то обѣ величины x будутъ всегда возможныя; и хотя бы они были возможны или нѣтъ , то всегда можно ихъ изъявить по сему способу : притомъ имѣютъ они всегда сіе свойство , что сумма ихъ равна a , а произведеніе $=b$, какъ въ семъ примѣрѣ видно $xx-bx+10=0$, гдѣ сумма обѣихъ знаменованій x должно быть b , а произведеніе $=10$. Обѣ величины будутъ: I) $x=3+\sqrt{-1}$; II) $x=3-\sqrt{-1}$, коихъ сумма $=6$, а произведеніе $=10$.

703.

703.

Сей характеръ можно изъявить вообще, притомъ можетъ быть онъ употребленъ и въ такихъ уравненіяхъ какъ $fxx \pm gx + b = 0$; ибо отсюда получится $xx = \mp gx$ ... и $= \mp \frac{g}{2f} \pm \left(\frac{gg}{4f} - \frac{b}{f}\right)$

или $x = \frac{\mp g \quad (gg - 4fb)}{2f}$; откуда видно, что обѣ величины для x могутъ быть мнимыя, или уравненіе не возможно, когда $4fb$ будетъ больше нежели gg, или когда въ семъ уравненіи $fxx \pm xxgx + b = 0$ учетверенное произведеніе изъ перваго и послѣдняго члена будетъ больше, нежели квадратъ втораго члена; ибо четверное произведеніе изъ перваго и послѣдняго членовъ есть $4fbxx$, квадратъ средняго члена есть $ggxx$, и когда $4fbxx$, больше нежели $ggxx$, то будетъ также $4fb$ больше нежели gg, слѣд. и уравненіе не возможно. Во всѣхъ другихъ случаяхъ уравненіе возможно, и обѣ величины для x дѣйствительно опредѣлить можно,

можно, хотя оные часто бываютъ и неизвлекомы, однако въ тѣхъ случаяхъ къ истинной величинѣ всегда приближиться можно, какъ уже выше сего упомянуто. Напротивъ того въ мнимыхъ выраженіяхъ какъ $\sqrt{-5}$ ни какое приближеніе мѣста не имѣетъ, ибо тогда и 100 отъ него столь же далеко отстоитъ какъ 1, или другое какое число.

704.

При семъ еще примѣчать надлежитъ, что каждая такая формула второй степени какъ $xx \pm ax \pm b$ непремѣнно раздѣлиться можетъ на два такіе множителя, какъ $(x \pm p)(x \pm q)$. ибо ежели бы кто хотѣлъ взять 3 такихъ множителя, то нашелъ бы уравненіе третей степени, на противъ того изъ одного такого множителя не дошелъ бы и до второй степени; по чему безспорно должно быть справедливо, что каждое уравненіе второй степени содержитъ въ себѣ двѣ величины для x, и что такихъ

величинъ въ немъ ни больше, ни меньше быть не можетъ.

705.

Уже показано было, что когда оба сіи множителя найдутся, то оттуда и обѣ величины для x опредѣлить можно будетъ; ибо каждаго множителя положивъ равна 0, найдется величина x. Сіе имѣетъ мѣсто и въ оборотномъ смыслѣ, то есть, какъ скоро одна величина x опредѣлена будетъ, познается оттуда и множитель квадратнаго уравненія; ибо когда $x=p$ есть одна величина для x въ квадратномъ уравненіи, то будетъ также $x-p$ одинъ множитель онаго, или когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, уравненіе раздѣлиться можетъ на $x-p$, и частное дастъ другаго множителя.

706.

Для изъясненія сего пусть будетъ данное уравненіе $xx+4x-21=0$, о которомъ мы знаемъ, что $x=3$ есть величина

личина количества x, ибо $3.3 + 4.3 - 21 = 0$, а оттуда заключить можемЪ, что $x - 3$ есть множитель сего уравненія, или что $xx + 4x - 21$ раздѣлиться можетЪ на $x - 3$, какЪ изЪ слѣдующаго дѣленія видно:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-3 & xx + 4x - 21 & x + 7 \\
 & xx - 3x & \\
\hline
 & \quad + 7x - 21 & \\
 & \quad + 7x - 21 & \\
\hline
\end{array}
$$

И такЪ другой множитель есть $x + 7$, и уравненіе наше можетЪ изЪявлено быть симЪ произведеніемЪ $(x - 3)(x + 7) = 0$, откуда обѣ величины количества x ясно видѣть можно; ибо изЪ перваго множителя будетЪ $x = 3$, а изЪ другаго $x = -7$.

ГЛАВА X.

О разрѣшеніи чистыхъ кубичныхъ уравненій.

707.

Чистое кубичное уравненіе называется, въ которомъ кубъ неизвѣстнаго количества полагается равенъ извѣстному числу, такъ что въ немъ ни квадратъ неизвѣстнаго числа, ни оно само не попадается.

Такое уравненіе есть $x^3 = 125$, или вообще $x^3 = a$, или $x^3 = \frac{a}{b}$.

708.

Какимъ образомъ изъ такого уравненія величина x находится, явно само по себѣ: ибо нужно только съ обѣихъ сторонъ извлечь кубичной корень.

Такъ изъ уравненія $x^3 = 125$ найдется $x = 5$, изъ уравненія $x^3 = a$ будетъ $x = \sqrt[3]{a}$; а изъ $x^3 = \frac{a}{b}$ найдется $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. И такъ естьли кто знаетъ, какъ извлекаетъ-

влекается кубичной корень изъ какого нибудь числа, тотъ можетъ разрѣшить и такое уравненіе.

709.

Но симъ образомъ получится одна только величина x; между тѣмъ когда каждое квадратное уравненіе имѣетъ двѣ величины для x, то можно думать, что также и кубичное уравненіе должно имѣть больше нежели одну величину; слѣд. не безнужно будетъ разсмотрѣть сіе обстоятельнѣе, и въ случаѣ, естьли такое уравненіе больше одной величины для x имѣть должно, какъ ихъ сыскать надлежитъ.

710.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе $x^3 = 8$, изъ коего всѣ числа найти должно, коихъ кубъ $= 8$, и поелику безъ всякаго сомнѣнія такое число $x = 2$, то по прежней главѣ $x^3 - 8 = 0$ должно дѣлиться на $x - 2$, чего ради здѣлаемъ сіе дѣленіе:

$$\begin{array}{r|l|l}
x-2 & x^3-8 & x^2+2x+4 \\
 & \underline{x^3-2x^2} & \\
 & +2x^2-8 & \\
 & \underline{+2x^2-4x} & \\
 & +4x-8 & \\
 & \underline{+4x-8} &
\end{array}$$

слѣдовательно уравненіе наше $x^3-8=0$ изъявить можно множителями $(x-2)$ $(xx+2x+4)=0$.

711.

Понеже здѣсь спрашивается, какое-бы число взять подлежало мѣсто x, чтобъ $x^3=8$ или $x^3-8=0$ было, то видно, что сіе учинится, когда въ прежнемъ пунктѣ найденное произведеніе положится 0; притомъ оно не только тогда будетъ 0, когда $x-2=0$; откуда получается $x=2$; но также и тогда, какъ другой множитель $xx+2x+4$ будетъ 0: чего ради положи ево $=0$, то есть $xx+2x+4=0$, то будетъ $xx=-2x-4$ и слѣд. $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

712.

И такъ сверьхъ $x=2$, въ которомъ случаѣ уравненіе $x^3=8$ разрѣшается, имѣемъ мы еще двѣ другія величины для x, коихъ кубы равнымъ образомъ дѣлаютъ 8, и которые суть такого состоянія I) $x=-1+\sqrt{-3}$; II) $x=-1-\sqrt{-3}$, а взявъ ихъ кубы сомнѣніе наше кончится.

$-1+\sqrt{-3}$		$-1-\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$		$-1-\sqrt{-3}$
$1-\sqrt{-3}$		$1+\sqrt{-3}$
$-\sqrt{-3}-3$		$+\sqrt{-3}-3$
$-2-2\sqrt{-3}$	квадратъ	$-2+2\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$		$-1-\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$		$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}-2.-3$		$+2\sqrt{-3}-2-3$
$2+6=8$ кубъ.		$2+6=8$.

Обѣ сіи величины суть хотя и невозможные или мнимыя; однако не смотря на то примѣчанія достойны.

713.

Сіе имѣетъ мѣсто въ каждомъ такомъ кубичномъ уравненіи, какъ $x^3 = a$, гдѣ сверьхъ $x = \sqrt[3]{a}$ еще двѣ другія величины содержатся; положи для краткости $\sqrt[3]{a} = c$, такъ что $a = c^3$, и уравненіе наше получитъ сію формулу $x^3 = c^3$, или $x^3 - c^3 = 0$, которое послѣднее дѣлится на $x - c$, какъ изъ предложеннаго дѣленія видно:

$$
\begin{array}{l|l|l}
x - c & x^3 - c^3 & x^2 + cx + c^2 \\
 & \underline{x^3 - cx^2} & \\
 & \quad + cx^2 - c^3 & \\
 & \quad \underline{+ cx^2 - c^2x} & \\
 & \qquad + c^2x - c^3 & \\
 & \qquad \underline{+ c^2x - c^3} &
\end{array}
$$

По чему предписанное уравненіе изъявиться можетъ симъ произведеніемъ $(x-c)(x^2 + cx + c^2) = 0$, что въ самомъ дѣлѣ будетъ равно 0, не только тогда, когда $x - c = 0$, или $x = c$, но также и когда $xx + cx + c^2 = 0$, а изъ сего будетъ $xx = -cx - c^2$; и слѣд. $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 - c^2)} =$

$\frac{-c\pm\sqrt{-3c^2}}{2} = \frac{-c\pm c\sqrt{-3}}{2} = \left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right).\ c.$ вЪ сей формулѢ содержатся еще двѢ величины для x.

714.

Понеже c вмѢсто $\sqrt[3]{a}$ написано было, то отсюда выводимЪ мы слѢдствїе: что вЪ каждой кубичной формулѢ какЪ $x^3 = a$ три величины для x содержатся, которые изЪявляются такЪ:

I) $x = \sqrt[3]{a}$, II) $x = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{a}$; III) $x = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{a}$.

Откуда явствуетЪ, что каждой кубичной корень три величины имѢетЪ, изЪ коихЪ хотя первая только возможна, протчїе же двѢ не возможны, которые однако здѢсь примѢчать надлежитЪ, для того что мы выше сего видѢли, что каждой квадратной корень двѢ величины имѢетЪ; а вЪ слѢдующихЪ покажется, что каждой корень четвертой степени имѢетЪ 4 разныя величины, пятой пять и такЪ далѢе.

вЪ простыхЪ выкладкахЪ употребляется только первой изЪ сихЪ трехЪ величинЪ

чинѢ, потому что оба другїе не возможны; чему намѢрены мы еще дать здѢсь нѢсколько примѢровѢ.

715.

ВопросѢ. Сыскать число, котораго квадратѢ ежели умножится на $\frac{1}{4}$ числа искомаго, произошло бы 432?

Пусть сїе число будетѢ x, то xx умноженное на $\frac{1}{4}x$ должно быть равно числу 432; слѢдов. будетѢ
$\frac{1}{4}x^3 = 432$, умноживѢ на 4, будетѢ $x^3 = 1728$, и извлекши кубичной корень найдется $x = 12$

ОтвѢтѢ. Искомое число есть 12: ибо квадратѢ его 144 умноженной на $\frac{12}{4}$ т. е. на 3 даетѢ 432.

716.

ВопросѢ. Сыскать число, коего бы четвертая степень раздѢленная на его половину, и кѢ сему частному естли придастся $14\frac{1}{4}$ чтобѢ вышло 100?

Искомое число положи x, то четвертая его степень x^4 раздѢленная на $\frac{1}{2}x$ даетѢ $2x^3$; кѢ сему придавѢ $14\frac{1}{4}$ должно

жно вытти 100, и такъ будетъ $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, вычти $14\frac{1}{4}$, выдетъ $2x^3 = \frac{343}{4}$, раздѣли на 2, выдетъ $x^3 = \frac{343}{8}$, и извлекши кубичной корень получится $x = \frac{7}{2}$.

717.

Вопросъ. Нѣсколько офицеровъ стоятъ въ полѣ, каждой въ командѣ своей имѣетъ въ трое столько конницы, и въ 20 разъ столько пѣхоты, нежели сколько всѣхъ офицеровъ въ полѣ находится; каждой конной получаетъ въ мѣсяцъ столько гулденовъ жалованья, сколько всѣхъ офицеровъ; а каждой пѣшей въ половину столько, вся же въ мѣсяцахъ выдаваемая на жалованье сумма денегъ дѣлаетъ 13000 гулден. спрашивается сколько всѣхъ офицеровъ было?

Положи число офицеровъ x, то каждой въ командѣ своей имѣетъ $3x$ конницы и $20x$ пѣхоты, слѣд. число всѣхъ конныхъ было $3xx$, а пѣшихъ $20xx$; и когда каждой конной въ мѣсяцъ получаетъ x гулденовъ, и каждой пѣшей $\frac{1}{2}x$ гулд.

гулд. то мѣсячное жалованье всѣхъ конныхъ будетъ $3x^3$ гульденовъ, а пѣхоты $10x^3$ гулд. и всѣ вообще получатъ они $13x^3$ гулденовъ, что должно быть равно числу 13000 гулд.

И такъ когда $13x^3 = 13000$, то будетъ $x^3 = 1000$ и $x = 10$. Столько было офицеровъ.

718.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ здѣлали компанію. Положивъ каждой въ 100 разъ больше, нежели ихъ число компанію составляющее, съ сею суммою посылаютъ они фактора въ Венецію; которой на каждые 100 флореновъ выигралъ въ двое больше, нежели число ихъ; а возвратившись назадъ привезъ барыша 2662 флор. спрашивается сколько купцовъ было?

Пусть будетъ x число купцовъ, то каждой изъ нихъ положилъ $100x$ флор. и весь капиталъ былъ $100xx$ флор; и когда на каждые 100 флор. получено барыша $2x$ флор., то весь выигрышъ

рышъ былъ $2x^3$ флор., что должно быть равно 2662 флор. слѣд. $2x^3 = 2662$ и $x^3 = 1331$, откуда $x = 11$. Столько было купцовъ.

719.

Вопросъ. Одна крестьянка промѣниваетъ сыръ на курицъ, давая 2 сыра за каждые 3 курицы: куры несутъ яица, каждая $\frac{1}{3}$ противу числа всѣхъ куръ. Съ сими яицами пошла она на рынокъ, и продаетъ каждые 9 яицъ за столько пфенинговъ сколько курица снесла яицъ, а выручила всѣхъ денегъ 72 пфенинга; спрашивается сколько сыровъ у нее было?

Положи число сыровъ было x, то промѣняла она ихъ за $\frac{3}{2}x$ курицы; когда каждая курица кладетъ $\frac{1}{2}x$ яицъ, то число всѣхъ яицъ было $\frac{3}{4}xx$: теперь продаетъ она каждые 9 яицъ за $\frac{1}{2}x$ пфенинговъ; слѣд. всего навсе выручила она $\frac{1}{24}x^3$ пфен., что 72 равно быть долженствуетъ. И такъ $\frac{1}{24}x^3 = 72$, и $x^3 = 72.24 = 8.8.3.9 = 8.8.27$, почему $x = 12$. Столько сыровъ у крестьянки было, кои она промѣняла за 18 курицъ.

ГЛАВА

ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи полныхъ кубичныхъ уравненій.

720.

Полное кубичное уравненіе называется, въ которомъ сверьхъ куба неизвѣстнаго числа, еще его квадратъ и самое неизвѣстное число находится. Общая формула такого уравненія есть $ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$, то есть когда всѣ члены перенесутся на одну сторону. А какимъ образомъ изъ такого уравненія величины x находятся, которые также и корни уравненія именуются, показано будетъ въ сей главѣ; ибо здѣсь можно уже знать напередъ, что такое уравненіе всегда 3 корня имѣетъ, по притчинѣ въ прежней главѣ о чистыхъ уравненіяхъ сея степени показанной.

721.

Съ самаго начала разсмотримъ сіе уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; когда

квадрат-

квадратное уравненіе почитается за произведеніе изЪ двухЪ множителей, то сіе кубичное можно почесть за произведеніе изЪ трехЪ множителей, которые вЪ семЪ случаѢ будутЪ:
$(x-1)(x-2)(x-3)=0$, кои умножены будучи между собою производятЪ прежнее уравненіе; ибо $(x-1)(x-2)=xx-3x+2$, и сіе умножа еще на $(x-3)$, вЪ произведеніи дастЪ $x^3-6xx+11x-6$ прежнее заданное уравненіе, которое равно 0 быть должно; что учинится когда произведеніе $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ будетЪ; а сіе здѢлается ежели только одинЪ изЪ 3хЪ множителей будетЪ 0; и слѢд. вЪ трехЪ случаяхЪ; первое, когда $x-1=0$, или $x=1$, второе, когда $x-2=0$, или $x=2$, третіе, когда $x-3=0$, или $x=3$. СверьхЪ сего видно, что какое бы другое число мѢсто x положено ни было, ни одинЪ изЪ сихЪ трехЪ множителей не будетЪ 0, слѢд. также и произведеніе; откуда видно, что уравне-

уравненіе наше никакихЪ другихЪ корней не имѣетЪ кромѣ сихЪ трехЪ.

722.

Естьли бы можно было кЪ каждомЪ другомЪ случаѣ опредѣлить сихЪ трехЪ множителей уравненія, то бы изЪ ихЪ нашлись тотчасЪ три корня онаго. На сей конецЪ разсмотримЪ мы три такіе множителя вообще, кои пусть будутЪ $x-p$, $x-q$, $x-r$: найди ихЪ произведеніе, и поелику первой умноженной на втораго даетЪ $xx-(p+q)x+pq$, то сіе произведеніе умноженное на $x-r$ произведетЪ слѣдующую формулу:

$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr$, которая ежели должна быть 0, то сіе учинится только вЪ трехЪ случаяхЪ; I) $x-p=0$ или $x=p$, II) $x-q=0$, или $x=q$; III) $x-r=0$ или $x=r$.

723.

Пусть сіе уравненіе теперь изобразится такЪ: $x^3-axx+bx-c=0$, и ежели корни

корни онаго будутъ I) $x=p$, II) $x=q$; III) $x=r$, то должно быть $a=p+q+r$, 2) $b=pq+pr+qr$; и 3) $c=pqr$, откуда видно, что вторый членъ содержитъ сумму всѣхъ трехъ корней, третій членъ сумму произведеній каждыхъ двухъ корней помноженныхъ между собою, и послѣдней членъ произведеніе всѣхъ трехъ корней умноженныхъ между собою. Сіе послѣднее свойство показываетъ намъ, что кубичное уравненіе подлинно никакого другаго раціональнаго корня имѣть не можетъ, какъ только того, на котораго послѣдней членъ дѣлится; ибо когда онъ есть произведеніе изъ всѣхъ трехъ корней, то долженъ онъ непремѣнно дѣлиться на каждаго изъ нихъ. И такъ тотчасъ узнать можно, какими числами помянутое дѣленіе пробовать должно, ежели пожелаешь узнать одинъ только корень.

Для изъясненія сего разсмотримъ мы уравненіе $x^3=x+6$ или $x^3-x-6=0$, когда оно никакого другаго раціональ-

наго корня не имѣетъ, кромѣ того, на которой послѣдней членъ 6 дѣлится, то пробу чинить надлежитъ съ сими только числами 1, 2, 3, 6

которые пробы стоятъ въ такомъ порядкѣ

I) когда $x=1$, то будетъ $1-1-6=-6$

II) когда $x=2$, то будетъ $8-2-6=0$

III) когда $x=3$, то будетъ $27-3-6=18$

IV) когда $x=6$, то будетъ $216-6-6=204$

Отсюда усматриваемъ мы, что $x=2$ есть корень предложеннаго уравненія, изъ коего уже оба другіе легко найти можно; ибо когда $x=2$ есть корень, то $x-2$ будетъ множитель уравненія; чего ради надлежитъ только сыскать другаго множителя, что учинится слѣдующимъ дѣленіемъ:

$$\begin{array}{r|l|l} x-2 & x^3-x-6 & x^2+2x+3 \\ & x^3-2x^2 & \\ \hline & 2x^2-x & \\ & 2x^2-4x & \\ \hline & +3x-6 & \\ & +3x-6 & \\ \hline \end{array}$$

Понеже формула наша изъявлена быть можетъ симъ произведеніемъ $(x-2)(x^2+2x+3)$, то оная будетъ 0, нетолько когда $x-2=0$; но и когда $xx+2x+3=0$, а отсюда имѣемъ мы $xx=-2x-3$, то есть $x=-1\pm\sqrt{-2}$ оба другіе корня нашего уравненія, кои какъ видно суть не возможные, или мнимые.

724.

Но сіе имѣетъ тогда только мѣсто, когда первой членъ уравненія x^3 на 1, а прочіе члены на цѣлыя числа помножены; естьли же въ данномъ уравненіи случатся дроби, то имѣемъ мы средство превращать сіе уравненіе въ другое, въ коемъ дробей не находится,

и тогда проба учинена съ нимъ быть можетъ какъ и прежде.

Пусть будетъ дано уравненiе $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$, понеже здѣсь четверти находятся, то положи $x = \frac{y}{2}$, и получится $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, что помноживъ на 8 будетъ $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, коего корни суть, какъ мы прежде уже видѣли $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$; слѣд. въ нашемъ уравненiи I) $x = \frac{1}{2}$; II) $x = 1$; III) $x = \frac{3}{2}$.

725.

Когда первой членъ въ уравненiи умноженъ будетъ на какое нибудь число, а послѣдней будетъ 1, какъ въ семъ уравненiи $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, откуда чрезъ дѣленiе на 6 произходитъ $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, которое по прежнему правилу отъ дробей освобождается, положивъ $x = \frac{y}{6}$; ибо тогда выдетъ $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, что умноживъ на 216 выдетъ $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$; но здѣсь трудно бы было дѣлать пробу со всѣми дѣлителями числа 36, а понеже въ первомъ ура-

уравненіи послѣдней членЪ $=1$, то положи $x=\frac{1}{z}$ и будетЪ $\frac{6}{z^3}-\frac{11}{z^2}+\frac{6}{z}-1=0$, что умноживЪ на z^3 произойдетЪ $6-11z+6z^2-z^3=0$ и перенеся всѣ члены на другую сторону будетЪ $z^3-6z^2+11z-6=0$, коего корни суть $z=1=2=3$; слѣд. вЪ нашемЪ уравненіи будетЪ $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$.

726.

ИзЪ вышепоказаннаго явствуетЪ, что когда всѣ корни будутЪ положительные, знаки $+$ и $-$ вЪ уравненіи перемѣняются, и тогда имѣетЪ оно такой видЪ $x^3-axx+bx-c=0$, гдѣ три перемѣны знаковЪ находятся, то есть, столько же сколько оно имѣетЪ положительныхЪ корней. Естьли же бы были всѣ три корня отрицательные, и помножены были между собою сіи три множителя $x+p$, $x+q$, $x+r$, то при всѣхЪ бы членахЪ находился знакЪ $+$; а уравненіе такую бы формулу имѣло $x^3+axx+bx+c=0$, гдѣ 3 раза 2 одинакіе знака другЪ за другомЪ слѣдуютЪ, то есть

столько же, сколько уравненіе имѣетъ отрицательныхъ корней.

Изъ сего выведено сіе слѣдствіе, сколь часто въ уравненіи знаки перемѣняются, столько положительныхъ корней оно имѣетъ, и сколь часто одинакіе знаки другъ за другомъ слѣдуютъ, столько оно отрицательныхъ корней имѣетъ. Сіе примѣчаніе здѣсь весьма важно, дабы познать, положительные или отрицательные дѣлители послѣдняго члена, съ которыми проба дѣлается, брать должно.

727.

Для изъясненія сего разсмотримъ сіе уравненіе:

$x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, въ которомъ двѣ перемѣны знаковъ, и одно только слѣдствіе того же знака находится, откуда мы заключаемъ, что сіе уравненіе имѣетъ два положительные, и одинъ отрицательный корень, кои должны быть дѣлители послѣдняго члена 56, и

слѣд. содержатся между числами $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Ежели положится $x = 2$, то будетъ $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, откуда видимъ, что $x = 2$ есть корень положительной, и слѣд. $x - 2$ дѣлитель нашего уравненія, откуда оба прочіе корня легко найти можно, ежели только уравненіе раздѣлится на $x - 2$, какъ слѣдуетъ:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-2 & x^3 + xx - 34x + 56 & x^2 + 3x - 28 \\
 & \underline{x^3 - 2xx} & \\
 & \quad 3xx - 34x & \\
 & \quad \underline{3xx - 6x} & \\
 & \qquad -28x + 56 & \\
 & \qquad \underline{-28x + 56} &
\end{array}
$$

И такъ сіе частное $xx + 3x - 28 = 0$ положивъ, найдутся оттуда оба другіе корня, кои будутъ $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, слѣд. оба послѣдніе корня будутъ $x = 4$ и $x = -7$, къ чему еще надлежитъ взять прежней $x = 2$.

Отсюда явствуетъ, что въ заданномъ уравненіи дѣйствительно два положительные и одинъ отрицательной корни содержатся, что слѣдующими примѣрами изъяснить мы намѣрены.

728.

Вопросъ. Сыскать два числа, коихъ разность 12, и ежели произведеніе ихъ помножится на ихъ сумму, тобъ вышло 14560.

Положивъ меньшее число x, большее будетъ $x+12$, произведеніе ихъ $xx+12x$, которое умножено будучи на $2x+12$ даетъ $2x^3+36xx+144x=14560$, раздѣливъ на 2, будетъ $x^3+18xx+72x=7280$.

Понеже послѣдней членъ 7280 такъ великъ, что пробы съ нимъ мы учинить не можемъ, то видя что онъ дѣлится на 8, положи $x=2y$ и выдетъ $8y^3+72yy+144y=7280$; сіе уравненіе раздѣливъ на 8 выдетъ $y^3+9yy+18y=910$, и теперь можно учинить пробу съ дѣлителями

лями числа 910, которые суть 1, 2, 5, 7, 10, 13 и протч. числа 1, 2, 5 суть дѣйствително малы, для того возми $y=7$ и получится $343+441+126$ точно $=910$, слѣд. одинъ корень $y=7$ и и $x=14$, а естли кто хочетъ знать и оба протчїе корня, то раздѣли $y^3+9y^2+18y-910$ на $y-7$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r|l|l} y-7 & y^3+9y^2+18y-910 & y^2+16y+130 \\ & \underline{y^3-7y^2} & \\ & \quad +16y^2+18y & \\ & \quad \underline{+16y^2-112y} & \\ & \qquad\quad 130y-910 & \\ & \qquad\quad \underline{130y-910} & \end{array}$$

Ежели положится сїе частное $y^2+16y+130=0$, то будетъ $yy=-16y-130$, откуда $y=-8\pm\sqrt{-66}$, то есть оба протчїе корня суть невозможны.

Отвѣтъ. Оба искомыя числа будутъ 14 и 26, коихъ произведенїе 364 умноженное на ихъ сумму 40 даетъ 14560.

729.

Вопросъ. Найти два числа, коихъ разность 18 и разность ихъ кубовъ умноженная на сумму чиселъ производитъ число 275184?

Меншее число пусть будетъ x, а большее $x+18$, кубъ меншаго x^3, большаго $x^3+54xx+972x+5832$ разность ихъ $=54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ которая умножена будучи на сумму чиселъ $2x+18=2(x+9)$ въ произведеніи даетъ $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$, раздѣли на 108 получится $x^3+27xx+270x+972=2548$, или $x^3+27xx+270x=1576$. Дѣлители числа 1576 суть 1, 2, 4, 8 и протч. изъ коихъ 1 и 2 малы, когда же положится 4 мѣсто x, то уравненіе разрѣшится, а для сысканія обѣихъ протчихъ корней должно уравненіе раздѣлить на $x-4$ какъ слѣдуетъ:

$x-4$

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-4 & x^3+27xx+270x-1576 & x^2+31x+394 \\
 & x^3-4xx & \\
\hline
 & 31xx+270x & \\
 & 31xx-124 & \\
\hline
 & 394x-1576 & \\
 & 394x-1576 & \\
\hline
\end{array}
$$

Изъ сего частнаго получится $xx = -31x-394$, а отсюда $x = -\frac{31}{2} \pm V\left(\frac{961}{4}-\frac{1576}{4}\right)$, которые оба суть невозможны.

Отвѣтъ. Искомыя числа суть 4 и 22.

730.

Вопросъ. Найти два числа, коихъ разность 720, и ежели квадратной корень изъ большаго числа умножится на меньшее, то бы вышло 20736?

Меньшее число пусть будетъ x, а большее $x+720$ и $xV(x+720)=20736 = 8.8.4.81$; возми теперь съ обѣихъ сторонъ квадраты, то будетъ $x^2(x+720) = x^3+720xx = 8^2.8^2.4^2.81^2$, положи $x = 8y$, то выдетъ $8^3y^3+8^2.720.yy = 8^2.8^2.4^2.81^2$

$4^2.81^2$, раздѣли на 8^3, будетъ $y^3+90y^2 = 8.4^2.81^2$, положи $y=2z$, выдетъ $8z^3 + 4.90zz = 8.4^2.81^2$, раздѣли на 8, будетъ $z^3+45zz=4^2.81^2$; положи $z=9u$, выдетъ $9^3u^3+45.9^2uu=4^2.9^4$

раздѣли на 9^3 будетъ $u^3+5uu=4^2.9$ или $uu(u+5)=16.9=144$. Здѣсь видно, что $u=4$; ибо тогда $uu=16$, и $u+5=9$, откуда $z=36$, $y=72$, и $x=576$, которое есть меншее число, большее же $=1296$, коего квадратной корень 36 умноженной на 576 даетъ число 20736.

731.

Примѣчаніе. Сей вопросъ способнѣе разрѣшиться можетъ симъ образомъ. Понеже большее число должно быть квадратъ, въ противномъ случаѣ корень его умноженной на меншее число не произвелъ бы заданнаго числа.

Пусть будетъ большее число xx, а меншее $xx-720$, которое на квадратной корень большаго числа, т. е. на x умно-

умноженное даетъ $x^3-720x=20736=64.$ 27.12, положи $x=4y$, то будетъ $64y^3$ $-720.4y=64.27.12$, раздѣли на 64, выдетъ $y^3-45y=27.12$, положи еще $y=3z$, и будетъ $27z^3-135z=27.12$, раздѣли на 27, выдетъ $z^3-5z=12$, или $z^3-5z-12$ $=0$. Дѣлители 12 ти суть 1, 2, 3, 4, 6, 12, изъ коихъ 1 и 2 очень малы, а когда положится $z=3$, то выдетъ 27 $-15-12=0$, слѣд. $z=3$, $y=9$ и $x=36$, и такъ большее число $xx=1296$, а меншее $xx-720=576$, какъ и прежде.

732.

Вопросъ. Найти два числа, которыхъ разность $=12$, и когда разность сія помножится на сумму ихъ кубовъ, чтобъ вышло 102144?

Положивъ меншее число x, большее будетъ $x+12$, кубъ перваго $=x^3$, а другаго $x^3+36xx+432x+1728$, сумма ихъ умноженная на 12 дастъ 12 $(2x^3+36xx+432x+1728)=102144$, раздѣли на 12, выдетъ $2x^3+36xx$ $+432x$

$+432x+1728=8512$ раздѣли на 2 выдетъ $x^3+18xx+216x+864=4256$,

или $x^3+18xx+216x=3392=8.8.53$. Положи $x=2y$ и раздѣли на 8, будетъ, $y^3+9yy+54y=8.53=424$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8, 53 и протч. изъ коихъ 1 и 2 очень малы, естли же положится $y=4$, то будетъ $64+144+216=424$, слѣд. $y=4$ и $x=8$, по чему оба искомыя числа суть 8 и 20.

733.

Вопросъ. Въ нѣкоторой купеческой компаніи кладетъ каждой въ 10 разъ столько флореновъ, сколько людей въ компаніи; получаютъ на каждые 100 флор. барыша 6 флор. больше, нежели ихъ число, напослѣдокъ нашлось, что весь барышъ былъ 392 флор. спрашивается сколько товарищей было?

Положи число товарищей было x, то каждой въ компанію положилъ $10x$ флореновъ, а всѣ вмѣстѣ положили $10xx$ флор.; на каждые 100 флореновъ изъ

сей

сей суммы выигрываютъ они 6 флореновъ больше, нежели сколько ихъ въ компаніи находится; слѣд. на 100 флор. получатъ барыша $x+6$ флор. и на весь ихъ капиталъ получаютъ они $\frac{x^3+6xx}{10}=392$

Умножь на 10, и выдетъ $x^3+6xx=3920$, положи $x=2y$, то получится $8y^3+24yy=3920$ раздѣливъ на 8 выдетъ $y^3+3yy=490$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и протч. изъ коихъ 1, 2 и 5 очень малы, когда же положится $y=7$, то выдетъ $343+147=490$, слѣд. $y=7$ и $x=14$.

Отвѣтъ. Число товарищей было 14, и каждой положилъ 140 флореновъ.

734.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ имѣютъ вмѣстѣ капиталъ изъ 8240 талеровъ состоящей, въ которую сумму каждой положилъ еще въ 40 разъ больше талеровъ, нежели число товарищей; сею суммою выигрываютъ они столько процен-

процентовъ сколько товарищей было: потомъ раздѣливъ сей выигрышъ взялъ каждой 10 разъ столько талеровъ, сколь велико ихъ число было, и наконецъ осталось еще 224 талера, спрашивается сколько всѣхъ купцовъ было?

Положи число ихъ $=x$, то каждой изъ нихъ кладетъ $40x$ талеровъ къ общему капиталу 8240 тал. слѣд. всѣ вмѣстѣ положатъ $40xx$ талер.; по чему вся сумма была $40xx+8240$, которою выигрываютъ они на каждые 100 талер. x талер. слѣд. весь выигрышъ будетъ $\frac{40x^3}{100}+\frac{8240x}{100}=\frac{4x^3}{10}+\frac{824x}{10}=\frac{2}{5}x^3+\frac{412x}{5}$; изъ сего числа беретъ каждой $10x$ талер. слѣд. всѣ вмѣстѣ возмутъ $10xx$ талер. и останется еще 224 талер., откуда явствуетъ что весь выигрышъ былъ $10xx+224$, чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{2}{5}x^3+\frac{412x}{5}=10xx+224$, которое раздѣливъ на 2 и помноживъ на 5 выдетъ $x^3+206x=25xx+560$ или $x^3-25xx+206x-560=0$. Чтожъ касается до пробы, то первая формула гораздо къ тому способнѣе.

Понеже

Понеже дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, и пр., которые должны быть положительныя числа, потому, что вѣ послѣднемѣ уравненіи находится 3 перемѣны знаковѣ; а оттуда заключить можно что всѣ три корня должны быть положительные.

Ежели проба учинится сѣ числами $x=1$ и $x=2$, то явно, что первая часть будетѣ гораздо меньше, нежели вторая: чего ради станемѣ пробовать слѣдующія числа:

когда $x=4$, то будетѣ $64+824=400+560$ несходно;

когда $x=5$, то будетѣ $125+1030=625+560$ несходно;

когда $x=7$, то будетѣ $343+1442=1225+560$ сходно, слѣд. $x=7$ есть корень нашего уравненія; а что бы сыскать и другіе два, то раздѣли послѣднюю формулу на $x-7$ какѣ слѣдуетѣ:

$$
\begin{array}{l}
x-7)\,x^3-25xx+206x-560)\,|\,x^2-18x+80 \\
\quad\underline{x^3-7xx} \\
\qquad -18xx+206x \\
\qquad \underline{-18xx+126x} \\
\qquad\qquad +80x-560 \\
\qquad\qquad \underline{80x-560}
\end{array}
$$

Сїе найденное частное положи $=0$, и будетъ $xx-18x+80=0$, или $xx=18x-80$, откуда $x=9\pm1$, по чему другїе оба корня суть $x=8$ и $x=10$.

Отвѣтъ. На сей вопросъ найдены 3 отвѣта: по первому рѣшенїю число купцовъ было 7; по второму 8; а по третьему 10, какъ всѣхъ ихъ трехъ присовокупленная здѣсь проба показываетъ

число

число купцовъ	I 7	II 8	III 10
каждой кладетъ 40x	280	320	400
всѣ вмѣстѣ кладутъ 40xx —	1960	2560	4000
старой капиталъ	8240	8240	8240
весь капиталъ 40xx+8240	10200	10800	12240
симъ выиграно столько процентовъ сколько товарищей	714	864	1224
изъ сего каждой беретъ 10x —	70	80	100
всѣ взяли 10xx —	490	640	1000
и такъ еще останет.	224	224	224

ГЛАВА XII.

О правилѢ Кардана, или Сципіона Ферреа.

735.

Ежели какое нибудь кубичное уравненіе приведено будетъ въ цѣлыя числа, какъ уже выше сего показано, и ни одинъ дѣлитель послѣдняго члена корнемъ уравненія быть не можетъ, то сіе значитъ, что уравненіе не имѣетъ ни какого корня ни въ цѣлыхъ числахъ, ни въ дробяхъ, что можетъ быть показано такъ:

Пусть будетъ уравненіе $x^3 - axx + bx - c = 0$; гдѣ a, b и c суть цѣлыя числа, и гдѣ ни одна дробь величиною x быть не можетъ; ибо естьлибъ положено было $x = \frac{3}{2}$, то вышлобъ $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$; здѣсь имѣетъ только первой членъ знаменателя 8, протчіе же раздѣлены только на 4 и 2, или суть цѣлыя числа, кои слѣд. съ первымъ не могутъ быть $= 0$,

$=0$, что должно думать и о всѢхЪ прочихЪ дробяхЪ.

736.

Поелику вЪ сихЪ случаяхЪ корни уравненія ни цѢлыя числа, ни дроби быть не могутЪ, то должны они быть неизвлекомые, также и невозможные. КакимЪ образомЪ ихЪ изЪявлять надлежитЪ и что за знаки коренные вЪ такомЪ уравненіи случаются, есть дѢло великой важности, коихЪ изобрѢтеніе уже за нѢсколько сотЪ лѢтЪ приписано было Кардану, или наипаче Сципіону Феррею, что здѢсь обстоятельно изЪяснить надобно.

737.

На сей конецЪ надлежитЪ здѢсь обстоятельнѢе разсмотрѢть натуру куба, коего корень состоитЪ изЪ двухЪ частей. ТакЪ пусть будетЪ корень $a+b$, то кубЪ его $a^3+3aab+3abb+b^3$, которой состоитЪ изЪ кубовЪ каждой части, и сверьхЪ того имѢетЪ еще два средніе члена, то есть, $3aab+3abb$, которые

оба имѣютъ множителемъ $3ab$, другой же множитель есть $a+b$; ибо $3ab$ умноженные на $a+b$, даютъ $3aab+3abb$, по чему сіи два члена содержатъ утроенное произведеніе обѣихъ частей a и b на сумму ихъ помноженное.

738.

Положи $x=a+b$, и возми съ обѣихъ сторонъ кубы, будетъ $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, и когда $a+b=x$, то получится сіе кубичное уравненіе $x^3=a^3+b^3+3abx$, или $x^3=3abx+a^3+b^3$, о которомъ мы знаемъ, что одинъ его корень есть $x=a+b$; слѣд. когда бы такое уравненіе ни случилось, корень его означить мы можемъ.

Пусть будетъ напр. $a=2$ и $b=3$, то выходитъ уравненіе $x^3=18x+35$, въ коемъ мы заподлинно знаемъ, что $x=5$ есть его корень.

739.

Положи еще $a^3=p$ и $b^3=q$, то будетъ $a=\sqrt[3]{p}$ и $b=\sqrt[3]{q}$, слѣд. $ab=\sqrt[3]{pq}$;

и такЪ когда случится уравненіе $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$, коего одинЪ корень есть $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = x$; но p и q всегда можно опредѣлить такЪ, что какЪ 3 раза $\sqrt[3]{pq}$, такЪ и $p+q$ будутЪ всегда равны даннымЪ числамЪ, и чрезЪ то мы приходимЪ вЪ состояніе разрѣшать каждое такого роду кубичное уравненіе.

740.

Чего ради пусть дано будетЪ сіе общее кубичное уравненіе $x^3 = fx + g$; вЪ семЪ случаѣ f должно сравнивать сЪ $3\sqrt[3]{pq}$, а g сЪ $p+q$, или p и q, такЪ опредѣлить надлежитЪ чтобЪ $3\sqrt[3]{pq}$ числу f, а $p+q$ числу g равны были, и тогда узнаемЪ мы, что корень уравненія нашего будетЪ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

741.

Слѣдовательно надлежитЪ разрѣшить сіи два уравненія I) $3\sqrt[3]{pq} = f$; II) $p+q=g$. ИзЪ перваго получится $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ а $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ и $4pq = \frac{4}{27}f^3$; изЪ другаго уравненія взявЪ его квадратЪ выдетЪ $pp + 2pq + qq = gg$. откуда вычти

$4pq = \frac{4}{27}f^3$, выдетъ $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$, извлеки квадратной корень, и будетъ $p - q = \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$ и понеже $p + q = g$, то будетъ $2p = g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$, $2q = g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}$ отсюда получаемъ мы $p = \frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$

и $q = \frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$

742.

И такъ естьли случится кубичное уравненіе $x^3 = fx + g$, какія бы числа f и g ни были, то корень его всегда будетъ $x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$

откуда явствуетъ, что сія неизвлекомость содержитъ въ себѣ не только знакъ квадратнаго корня, но также и кубичнаго; и сія формула есть самое то, что обыкновенно Кардановымъ правиломъ называется.

743.

Сію формулу изъяснимъ нѣсколькими примѣрами.

Пусть

Пусть будетЪ $x^3 = 6x + 9$, то видно что $f = 6$, $g = 9$, $gg = 81$, $f^3 = 216$, $\frac{4}{27}f^3 = 32$, слѣд. $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$, и квадратной корень изЪ $gg - \frac{4}{27}f^3 = 7$; и такЪ предложеннаго уравненія корень $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, то есть, $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, или $x = 2 + 1 = 3$.

744.

Пусть еще дано будетЪ уравненіе $x^3 = 3x + 2$, то будетЪ $f = 3$, $g = 2$, $gg = 4$, $f^3 = 27$, $\frac{4}{27}f^3 = 4$ слѣд. квадратной корень изЪ $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$, по чему корень будетЪ $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}}$ $x = 1 + 1 = 2$.

745.

Но такое уравненіе имѣетЪ хотя и раціональной корень, однакожЪ часто случается, что его по сему правилу найти не можно, хотя помянутой корень вЪ немЪ и содержится.

Пусть дано будетЪ уравненіе $x^3 = 6x + 40$, гдѣ корень $x = 4$. Здѣсь $f = 6$ $g = 40$, $gg = 1600$ и $\frac{4}{27}f^3 = 32$; слѣд.

$gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ и $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; по чему корень $x = \sqrt[3]{\frac{(40 + 28\sqrt{2})}{2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}\right)}$, или $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$ которая формула дѣйствительно равна 4, хотя сего и не видно; ибо когда кубъ $2 + \sqrt{2}$ есть $20 + 14\sqrt{2}$, то обратно корень кубичной изъ $20 + 14\sqrt{2}$ есть $2 + \sqrt{2}$; и такимъ же точно образомъ $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$, откуда корень нашъ $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

746.

Можно сказать противу сего правила , что его не во всѣхъ кубичныхъ уравненіяхъ употреблять можно , потому что въ немъ квадрата x не находится , или для того, что въ немъ не достаетъ втораго члена. Въ семъ случаѣ знать надлежитъ , что каждое полное уравненіе всегда можно превратить въ другое , въ которомъ втораго члена не находится , и слѣдовательно тогда сіе правило употребить можно будетъ. Для изъясненія сего пусть дано будетъ полное

ное кубичное уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; здѣсь берется третья часть числа при второмъ членѣ находящагося, и полагается $x - 2 = y$, откуда $x = y + 2$; протчая выкладка будетъ слѣдующая:

положивъ $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$,
$x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$,

$$\begin{aligned} \text{будетъ } x^3 &= y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx &= \quad - 6yy - 24y - 24 \\ +11x &= \qquad\quad + 11y + 22 \\ -6 &= \qquad\qquad\quad - 6 \\ \hline 0 &= y^3 - y \end{aligned}$$

Откуда получаемъ мы уравненіе $y^3 - y = 0$, коего рѣшеніе легко видѣть можно; ибо разрѣшивъ его на множителей будетъ $y(yy - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$, и ежели каждой множитель положится $= 0$, то получится

$$\text{I}\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{II}\begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{III}\begin{cases} y = 1 \\ x = 3, \end{cases}$$

кои

кои суть три уже выше сего найденные корня.

747.

Пусть теперь дано будетъ сіе общее кубичное уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, изъ коего выключить надлежитъ второй членъ.

На сей конецъ приложи къ x третью часть числа при второмъ членѣ находящагося и съ его знакомъ; а мѣсто того напиши другую букву, напр. y, то по сему правилу получимъ мы $x + \frac{1}{3}a = y$, и $x = y - \frac{1}{3}a$, откуда происходитъ слѣдующая выкладка:

$$x = y - \tfrac{1}{3}a \;;\quad xx = yy - \tfrac{2}{3}ay + \tfrac{1}{9}aa \;;\quad x^3 = y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3$$

слѣдов. будетъ

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3 \\ +axx &= +ayy - \tfrac{2}{3}aay + \tfrac{1}{9}a^3 \\ +bx &= +by - \tfrac{1}{3}ab \\ +c &= +c \\ \hline & y^3 - \tfrac{1}{3}aay + \tfrac{2}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}ab + c = 0 \\ & \quad + by \end{aligned}$$

И такъ

И такъ мѣсто прежняго уравненія выдетъ сіе, въ которомъ втораго члена не имѣется.

748.

Теперь можно Карданово правило употребить также и въ семъ случаѣ; ибо прежде сего имѣли мы уравненіе $x^3 = fx + g$, или $x^3 - fx - g = 0$, то въ нашемъ примѣрѣ будетъ $f = \frac{1}{3}aa - b$, и $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$, и изъ сихъ вмѣсто буквъ f и g найденныхъ величинъ получимъ какъ и прежде

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$$

и ежели такимъ образомъ найдется y, то въ данномъ уравненіи будемъ мы имѣть $x = y - \frac{1}{3}a$.

749.

Помощію сей перемѣны въ состояніи мы найти корни всѣхъ кубичныхъ уравненій, что слѣдующимъ примѣромъ изъяснить можно: пусть будетъ данное уравненіе $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$, и дабы изъ него исключить второй членъ, то положи $x - 2 = y$, и будетъ

$x = y + 2$; $xx = yy + 4y + 4$; $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$;

слѣд.
$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx &= \quad - 6yy - 24y - 24 \\ +13x &= \quad + 13y + 26 \\ -12 &= \quad - 12 \end{aligned}$$

$y^3 + y - 2 = 0$, или $y^3 = -y + 2$, что по формулѣ $x^3 = fx + g$ даетъ $f = -1$, $g = 2$ и $gg = 4$, $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$ слѣд; $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$, отсюда получится $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{\sqrt{21}}{9}$

откуда слѣдуетъ $y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}, \text{ или}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{1 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ или}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)}, \text{ или}$$

$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; изъ чего выдетъ $x = y + 2$.

75.

750.

При разрѢшеніи сего примѢра, хотя дошли мы до двоякой неизвлекомости; однако изЪ сего заключать не должно, что корень дѢйствительно быть долженЪ неизвлекомое число, ибо случиться можетЪ, что биномій или двучленное количество $27 \pm 6\sqrt{21}$ будетЪ дѢйствительной кубЪ; что самое и здѢсь случилось. Ибо кубЪ половины $\frac{3+\sqrt{21}}{2} = \frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27+6\sqrt{21}$; слѢд кубичной корень изЪ $27+6\sqrt{21} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, а кубичной корень изЪ $27\ 6\sqrt{21} = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$, по чему величина $y = \frac{1}{3}(\frac{3+\sqrt{21}}{2}) + \frac{1}{3}(\frac{3-\sqrt{21}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, и когда $y = 1$, то будетЪ $x = 3$, которое число есть корень предложеннаго уравненія; а естьли бы захотѢлЪ кто сыскать и другіе два корня, то должно бы уравненіе раздѢлить на $x-3$, какЪ слѢдуетЪ:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-3 & x^3-6xx+13x-12 & x^2-3x+4 \\
 & \underline{x^3-3xx} & \\
 & \quad -3xx+13x & \\
 & \quad \underline{-3xx+\ \ 9x} & \\
 & \qquad\quad +\ 4x-12 & \\
 & \qquad\quad \underline{+\ 4x-12} &
\end{array}
$$

Положивъ частное $xx-3x+4=0$, будетъ $xx=3x-4$, откуда $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-\frac{16}{4})}$ $=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{-7}{4}}$, то есть $x=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$ оба последніе корня, которые суть невозможны.

751.

Здѣсь должно приписывать щастію, что изъ найденныхъ биноміевъ дѣйствительно кубичной корень извлечь можно было, что въ тѣхъ только случаяхъ дѣлается, когда уравненіе имѣетъ раціональной корень, которой бы для сей причины гораздо легче найти можно было, по правилу въ прежней главѣ предписанному. А естьли уравненіе не имѣетъ раціональнаго корня, то не можно иначе его изъявить, какъ по сему Карда-

нову

нову правилу, такЪ что вЪ томЪ случаѢ никакое сокращеніе уже мѢста не имѢетЪ. КакЪ напр. вЪ уравненіи $x^3 = 6x + 4$, гдѢ $f = 6$, $g = 4$, найдется $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, коего иначе изЪявить нельзя.

ГЛАВА XIII.

О разрѢшеніи уравненій четвертой степени, кои также и биквадратные называются.

752.

Ежели вышшая степень числа x будетЪ четвертая, то такія уравненіи называются уравненіями *четвертой степени* или *биквадратными*, коихЪ общая формула есть $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. ИзЪ сего рода уравненій сперва разсмотреть надлежитЪ чистые биквадратные уравненіи, которыхЪ формула есть $x^4 = f$, и изЪ коихЪ тотчасЪ корень найти можно

жно, извлекши только съ обѣихъ стоpонъ корень четвертой степени, какъ $x = \sqrt[4]{f}$.

753.

Поелику x^4 есть квадратъ изъ xx, то выкладка немало облегчится, естьли сперва извлечется только квадратной корень, ибо тогда будетъ $xx = \sqrt{f}$, а потомъ извлекши въ другой разъ тотъ же квадратной корень будетъ $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, такъ что $\sqrt[4]{f}$ ни что иное есть, какъ квадратной корень изъ квадратнаго корня f, Ежели бы напр. уравненіе было $x^4 = 2401$, то отсюда найдется сперва $xx = 49$, а потомъ $x = 7$.

754.

Но симъ образомъ находимъ мы только одинъ корень; а поелику каждое кубичное уравненіе оныхъ имѣетъ три, то безъ сумнѣнія ихъ здѣсь должно быть 4, кои симъ образомъ найдутся. Въ послѣднемъ примѣрѣ нашли мы не только $xx = 49$, но также $xx = -49$, то явствуетъ

ствуетъ, что изъ перваго найдутся два корня $x = 7$ и $x = -7$; а изъ другаго $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ и $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, кои суть 4 корня числа 2401; то же самое должно думать и о всѣхъ прочихъ числахъ.

755.

Послѣ сихъ чистыхъ уравненій слѣдуютъ по порядку тѣ, въ которыхъ втораго и четвертаго члена не находится, или кои въ сей формулѣ содержатся: $x^4 + fxx + g = 0$, и кои по правилу квадратныхъ уравненій разрѣшены быть могутъ. Ибо положивъ $xx = y$ будетъ $y^2 + fy + g = 0$ или $yy = -fy - g$ откуда найдется $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{f^2}{4} - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$ и поелику $xx = y$, то отсюда будетъ $x = \pm\sqrt{\frac{(-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)})}{2}}$, гдѣ двойные знаки $\pm$ покажутъ всѣ 4 корня уравненія.

756.

Когда же въ уравненіи всѣ члены находятся, то можно оное почесть какъ произведеніе изъ четырехъ множителей.

 Ибо

Ибо умножЪ сіи 4 множителя между собою $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, то найдется слѢдующее произведеніе: $x^4-x^3(p+q+r+s)$ $+xx(pq+pr+ps+qr+qs+rs)-x(pqr+pqs$ $+prs+qrs)+pqrs$, которая формула не иначе о быть можетЪ, какЪ когда одинЪ изЪ сихЪ 4 хЪ множителей будетЪ о, а сіе вЪ 4 хЪ случаяхЪ здѢлаться можетЪ

I) когда $x=p$; II) $x=q$; III) $x=r$;)IV) $x=s$ кои слѢдовательно суть корни предложеннаго уравненія.

757.

Ежели мы сію формулу обстоятельнѢе разсмотримЪ, то найдемЪ, что во второмЪ членѢ находится сумма всѢхЪ 4 хЪ корней помноженныхЪ на $-x^3$; вЪ третьемЪ членѢ находится сумма произведеній изЪ каждыхЪ двухЪ корней умноженныхЪ между собою и на xx; вЪ четвертомЪ сумма произведеній каждыхЪ трехЪ корней помноженныхЪ между собою и на $-x$; и наконѢцЪ вЪ пятомЪ и послѢднемЪ находится произведеніе изЪ

всѢхЪ

всѢхЪ четырехЪ корней помноженныхЪ между собою.

758.

Поелику послѢдней членЪ есть произведенїе изЪ всѢхЪ 4 хЪ корней, то такое биквадратное уравненїе, не можетЪ другаго рацїональнаго имѢть корня, какЪ того, которой вмѢстѢ есть и дѢлитель послѢдняго члена. По сей причинѢ всѢ рацїональные корни, естьли только они вЪ уравненїи содержатся, легко найти можно, полагая только мѢсто x по порядку каждаго дѢлителя послѢдняго члена, и смотря по которымЪ изЪ нихЪ уравненїе разрѢшится; и естьли хотя только одинЪ такой корень найдется, какЪ напр. $x = p$, то раздѢли уравненїе, перенеся всѢ члены на одну сторону, на $x - p$, и частное положивЪ $= 0$ дастЪ кубичное уравненїе, которое по предписаннымЪ выше сего правиламЪ разрѢшить можно.

759.

Къ сему требуется, чтобъ всѣ члены состояли изъ цѣлыхъ чиселъ, и чтобъ первой членъ умноженъ былъ только на 1. А когда бы въ нѣкоторыхъ членахъ случились дроби, то должно бы было ихъ сперва исключить изъ уравненія, что всегда учиниться можетъ, полагая мѣсто x число y раздѣленное на число, которое знаменателей дробей въ себѣ заключаетъ. Такъ когда бы дано было уравненіе $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, и когда въ знаменателяхъ 2 и 3 съ ихъ степенями находятся, то положи $x = \frac{y}{6}$, и будетъ $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, что умноживъ на 6^4 дастъ $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$; и естьли бы теперь кто захотѣлъ знать, имѣетъ ли сіе уравненіе раціональные корни, то къ сему требуется только класть по порядку всѣхъ дѣлителей числа 72 мѣсто y, и смотрѣть когда уравненіе равно 0 будетъ.

760.

Но поелику корни уравненія какъ положительные, такъ и отрицательные быть могутъ, то съ каждымъ дѣлителемъ должно бы было дѣлать двѣ пробы, первую полагая его положительнымъ, а вторую отрицательнымъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что сколь часто два знака + и − между собою перемѣняются, уравненіе имѣетъ столькожъ положительныхъ корней; а сколько разъ два одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ, столько отрицательныхъ корней уравненіе имѣетъ. И поелику въ нашемъ примѣрѣ 4 перемѣны знаковъ находятся, и нѣтъ ни одного слѣдствія оныхъ, того ради всѣ корни онаго суть положительные, и посему нѣтъ нужды брать дѣлителя послѣдняго члена отрицательнаго

761.

Пусть будетъ напр. дано уравненіе $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$; здѣсь находятся двѣ перемѣны знаковъ и два

слѣдствія, изъ чего вѣрно заключить можно, что сіе уравненіе имѣетъ два корня положительные, и два отрицательные; кои всѣ должны быть дѣлители послѣдняго члена; и когда оные суть 1, 2, 3, 4, 6, 12, то здѣлай сперва пробу, положивъ $x = +1$, и выдетъ дѣйствительно 0, почему одинъ корень есть $x = 1$; а когда положится еще $x = -1$, то выдетъ слѣдующее $+1-2+8+12-7 = 21-9 = 12$ и слѣд. $x = -1$ не можетъ быть корень сего уравненія. Положи еще $x = 2$, то наша формула будетъ опять $= 0$, по чему $x = 2$ есть корень уравненія; напротивъ того $x = -2$ онымъ быть не можетъ. Положи еще $x = 3$, то выдетъ $81+54-63-24+12 = 60$, не годится; а ежели положится $x = -3$, то выдетъ $81-54-63+24+12 = 0$ и $x = -3$ есть корень уравненія; такожде найдется, что $x = -4$ будетъ корень уравненія, такъ что всѣ 4 корня суть раціональны, и такого состоянія:

1)

I) $x=1$; II) $x=2$, III) $x=-3$; IV) $x=-4$, изъ коихъ два положительные, и два отрицательные, какъ прежнее правило показываетъ.

762.

Когда же въ уравненіи не будетъ ни одного раціональнаго корня, то симъ образомъ найти ихъ не льзя; и для того ученые думали, какимъ бы образомъ въ сихъ случаяхъ, не извлекомые корни изъявить можно было; и въ семъ столь щасливы были, что нашли два различные средства къ достиженію познанія такихъ корней, какого бы состоянія биквадратное уравненіе ни было.

Но прежде нежели мы сіе средство покажемъ, не безнужно разрѣшить напередъ нѣсколько особливыхъ случаевъ, кои весьма часто съ пользою употреблены быть могутъ.

763.

Ежели уравненіе будетъ такого состоянія, что въ немъ числа при членахъ

нахЪ находящіяся такимЪ же порядкомЪ идутЪ вЪ задЪ, какЪ и вЪ передЪ, какЪ видно вЪ уравненіи $x^4+mx^3+nxx+mx+1=0$ которое вообще изображено быть можетЪ $x^4+max+naax+ma^3x+a^4=0$, которую формулу всегда почесть можно за произведеніе изЪ двухЪ квадратныхЪ множителей, кои легко опредѢлить можно. Ибо мѢсто сего уравненія положи слѢдующее произведеніе $(xx+pax+aa)(xx+qax+aa)=0$, гдѢ p и q сыскать надлежитЪ, чтобЪ вышло прежнее уравненіе. Понеже по дѢйствительному умноженію находится

$x^4+(p+q)ax^3+(pq+2)aaxx+(p+q)a^3x+a^4=0$, и чтобы сіе уравненіе прежнему равно было, требуются двѢ вещи: I) $p+q=m$; II) $pq+2=n$; слѢд. $pq=n-2$; взявЪ первой квадратЪ будетЪ $pp+2pq+qq=mm$, изЪ сего второе 4 раза взятое вычти, аимянно $4pq=4n-8$ останется $pp-2pq+qq=mm-4n+8$, коего квадратной корень $p-q=\sqrt{(mm-4n+8)}$; но $p+q$ $=m$

$=m$, то по сложенію получимъ $2p = m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ или $p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$, а по вычитанію $2q = m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ или $q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$ а нашедъ p и q положи только каждаго множителя $= 0$, чтобы оттуда найти величину x.

Первой $xx + pax + aa = 0$ или $xx = -pax - aa$ дастъ $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2a^2}{4} - aa)} = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{(\frac{pp}{4} - 1)}$ или $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp - 4)}$

Другой множитель дастъ $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq - 4)}$. Симъ образомъ найдутся 4 корня даннаго уравненія.

764.

Для изъясненія сего пусть дано будетъ уравненіе $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$, здѣсь $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, слѣд. $mm - 4n + 8 = 36$, откуда квадратной корень $= 6$ чего ради получится $p = \frac{-4 + 6}{2} = 1$; и $q = \frac{-4 - 6}{2} = -5$, по чему 4 корня будутъ I) и II) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; III)

и

и IV) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, и такъ 4 корня даннаго уравненія будутъ слѣдующія I) $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; II) $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; III) $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$; IV) $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, изъ коихъ первые два не возможные , протчіе же два возможны ; по тому что $\sqrt{21}$ такъ акуратно опредѣлить можно , какъ кто захочетъ , изобразивъ корень въ дробяхъ десятичныхъ; ибо 21 тоже что и 21, 00000000, того ради извлеки отсюда квадратной корень какъ слѣдуетъ :

```
21|00|00|00|00|4 , 5825
16|
---
 500
  85
 425
 ---
  7500
   9 8
  7264
  ----
   23600
    9162
   18324
   -----
    527600
     91645
    458225
    ------
     69375
```

поелику

поелику $\sqrt{21} = 4, 5825$, то третей корень будетъ почти точно $x = 4, 7912$, и четвертой $x = 0, 2087$, которые еще точнѣе вычислить можно.

Понеже четвертой корень довольно справедливъ, то есть $\frac{2}{10}$ или $\frac{1}{5}$, того ради сія величина почти разрѣшитъ наше уравненіе; и такъ положа $x = \frac{1}{5}$, будетъ $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$, а должно бы быть $= 0$, что довольно съ правдою сходно.

765.

Другой случай, въ которомъ подобное сему рѣшеніе мѣсто имѣетъ, есть, когда числа въ уравненіи будутъ всѣ тѣ же, какъ и въ прежнемъ, только что при второмъ и четвертомъ членахъ разные съ прежними знаки находятся. Такое уравненіе будетъ.

$x^4 - max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$, которое изъявлено быть можетъ слѣдующимъ произведеніемъ $(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0$, и чрезъ самое умноженіе получится $x^4 + (p + q)ax^3 + (pq - 2)$ $aaxx$

$aaxx-(p+q)a^3x+a^4$, которое съ прежнимъ уравненіемъ будетъ одинако, естьли будетъ $p+q=m$, и $pq-2=n$, или $pq=n+2$; ибо четвертой членъ самъ по себѣ будетъ тотъ же съ прежнимъ. Возми квадратъ перваго уравненія $pp+2pq+q^2=m^2$, изъ сего вычти второе 4 раза взятое, т: е $4pq=4n+8$ и будетъ $pp-2pq+qq=mm-4n-8$, откуда квадратной корень дастъ $p-q=\sqrt{(mm-4n-8)}$; слѣд. будетъ $p=\frac{m+\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$ и $q=\frac{m-\sqrt{(mm-4n-8)}}{2}$. Симъ образомъ нашедъ p и q первой множитель дастъ сіи два корня $x=-\frac{1}{2}pa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$; а второй множитель сіи два $x=-\frac{1}{2}qa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$ Симъ образомъ найдены будутъ всѣ 4 корня уравненія предложеннаго.

766.

Пусть дано будетъ наприм. уравненіе $x^4-3.2x^3+3.8x+16=0$, гдѣ $a=2$, и $m=-3$, $n=0$, слѣд. $\sqrt{(mm-4n-8)}=1$, и $p=\frac{-3+1}{2}=-1$; $q=\frac{-3-1}{2}=-2$, откуда два

два первые корня будутъ $x = 1 \pm \sqrt{5}$, а два послѣдніе $x = 2 \pm \sqrt{8}$, такъ что всѣ 4 искомые корня суть I) $x = 1 + \sqrt{5}$; II) $x = 1 - \sqrt{5}$; III) $x = 2 + \sqrt{8}$; IV) $x = 2 - \sqrt{8}$. По сему 4 множителя нашего уравненія будутъ $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$ которые самымъ дѣломъ умножены будучи между собою, наше уравненіе произвести должны; ибо изъ умноженія перваго и втораго выходитъ $x^2 - 2x - 4$; изъ умноженія двухъ другихъ выходитъ $xx - 4x - 4$, и сіи два произведенія между собою умноженные, даютъ $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$ точно въ нашемъ примѣрѣ предложенное уравненіе.

ГЛАВА

ГЛАВА XIV.

О Помбеллїевомъ правилѣ биквадратные уравненіи приводить въ кубичные.

767.

Поелику мы уже видѣли, какъ кубичныя уравненіи рѣшатся по правилу Кардана, то при биквадратныхъ уравненіяхъ все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ рѣшеніе оныхъ знать обращать въ кубичные уравненіи Ибо безъ помощи кубичнаго уравненія биквадратное разрѣшить вообще не возможно, потому что хотя бы и нашелся одинъ корень такого уравненія, то остальные требуютъ еще кубичнаго рѣшенія. Отсюда видно, что для рѣшенія уравненій высшихъ степеней должно знать напередъ рѣшеніе нижнихъ.

768.

На сей конецъ Италїанецъ Помбеллїй за нѣсколько уже сотъ лѣтъ предъ симъ нашелъ правило, каторое мы въ сей главѣ предложить намѣрены.

Пусть

Пусть дано будетъ генеральное биквадратное уравненіе $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, гдѣ буквы a, b, c и d всѣ возможныя числа значить могутъ. Теперь представить себѣ надлежитъ, что сіе уравненіе одинаково съ слѣдующимъ $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2$, гдѣ нужно только опредѣлить буквы p, q и r, такъ чтобы вышло данное уравненіе, и приведя послѣднее сіе въ порядокъ выдетъ:

$$
\begin{aligned}
x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx + apx + pp \\
+ 2pxx - 2qrx - rr \\
- qqxx
\end{aligned}
$$

Первые два члена здѣсь съ двумя первыми даннаго уравненія одинаки, а мѣсто третьяго должно положить $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, откуда будетъ $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$; мѣсто четвертаго положить должно $ap - 2qr = c$, откуда $2qr = ap - c$, а мѣсто послѣдняго надлежитъ положить $pp - rr = d$, и будетъ $rr = pp - d$, и изъ сихъ трехъ уравненій должно опредѣлить буквы p, q и r,

769.

Что бы сіе легче учинить, то возми первое уравненіе 4 жды, и будетъ $4qq = aa + 8p - 4b$, сіе умножь на послѣднее $rr = pp - d$, и получится $4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$, возми теперь квадратъ средняго уравненія $4qqrr = aapp - 2acp + cc$, по чему будемъ мы имѣть двѣ величины для $4qqrr$, которые положивъ равными между собою, произойдетъ уравненіе $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$ и перенеся всѣ члены на одну сторону, выдетъ $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$, которое есть кубичное уравненіе, и изъ коего въ каждомъ случаѣ величину p по выше показанному правилу опредѣлять должно.

770.

И когда изъ данныхъ чиселъ a, b, c, d найдена будетъ буква p, то довольно уже сего будетъ, чтобы найти оттуда двѣ другіе q и r; изъ перваго уравненія будетъ $q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2p - b)}$, а изъ другаго

другаго $r = \frac{ap - c}{2l}$. И ежели сіи три буквы для каждаго случая уже найдены, то оттуда можно сыскать всѣ 4 корня предложеннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

771.

Когда данное уравненіе привели мы въ формулу $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, то $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$, откуда извлекши квадратной корень будетъ $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, или также $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.

Первое уравненіе дастъ $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, откуда получатся два корня, прочіе же два изъ другаго, которое есть $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x = p - r$. Чтобы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть предложено будетъ уравненіе $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, которое сравнивъ съ генеральною нашею формулою, дастъ $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$. изъ коихъ для опредѣленія p слѣдующее уравненіе произходитъ $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$, которое раздѣливъ на 4 дастъ $2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0$. Дѣлители

 послѣ-

послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и пр. здѣсь 1 мала, естьли же положится $p=5$, то выдетъ $250-875+1010-385=0$, слѣд. $p=5$, и когда положишь $p=7$, то выдетъ $686-1715+1414-385=0$, слѣд. $p=7$, другой корень; а что бы сыскать и третей корень, то раздѣли уравненіе на 2, и выдетъ $p^3-\frac{35pp}{2}+101p-\frac{385}{2}=0$; и когда число во второмъ членѣ $\frac{35}{2}$ есть сумма всѣхъ трехъ корней, первые же 2 вмѣстѣ дѣлаютъ 12, чего ради третеи корень долженъ быть $\frac{11}{2}$. Такимъ образомъ нашли мы всѣ три корня, но довольно бы было и одного, потому что изъ каждаго изъ нихъ четыре корня нашего биквадратнаго уравненія опредѣлиться должны.

772.

Дабы сіе показать, то пусть сперва будетъ $p=5$, откуда $q=\sqrt{}(25+10-35)=0$, $r=\frac{-50+50}{0}=\frac{0}{0}$. Но поелику симъ образомъ ни чего опредѣлить нельзя, то возми третіе уравненіе $rr=pp-d=25-24=1$, слѣд. $r=1$; отсюда оба наши квадратныя уравненія будутъ I) $xx=5x-4$,

II)

II) $xx = 5x - 6$: первое дастъ сіи два корня $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, или $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, т. е. $x = 4$, или $x = 1$.

Другое уравненіе дастъ $x = 5 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, или $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, то есть $x = 3$, или $x = 2$.

Естьли же положится $p = 7$, то будетъ $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ и $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$; откуда произходятъ сіи два квадратныя уравненіи: I) $xx = 7x - 12$; II) $xx = 3x - 2$, изъ коихъ первое даетъ корни $x = \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$; слѣд: $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, то есть $x = 4$, или $x = 3$, другое дастъ корни $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, слѣд. $x = \frac{3 \pm 1}{2}$ и $x = 2$, или $x = 1$, кои суть тѣ же самые 4 корня какіе прежде найдены были, и самые тѣ же найдутся и изъ третей величины $p = \frac{11}{2}$; ибо тогда будетъ $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ и $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$; откуда два квадратныя уравненіи

I) $xx = 6x - \frac{16}{2}$, или $xx = 6x - 8$; II) $xx = 4x - 3$: изъ перваго получится $x = 3 \pm \sqrt{1}$, слѣд. $x = 4$, и $x = 2$; изъ другаго $x = 2 \pm \sqrt{1}$, то есть $x = 3$ и $x = 1$, которые суть тѣ же 4 корня.

773.

Пусть дано будетъ еще сіе уравненіе $x^4 - 16x - 12 = 0$, въ которомъ $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$, по чему кубичное наше уравненіе будетъ $8p^3 - 8dp - cc = 0$; или $8p^3 + 96p - 256 = 0$, то есть $p^3 + 12p - 32 = 0$, которое уравненіе еще простяе здѣлается положивъ $p = 2t$; ибо тогда будетъ $8t^3 + 24t - 32 = 0$, или $t^3 + 3t - 4 = 0$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, изъ коихъ $t = 1$ есть одинъ корень, откуда $p = 2$ и $q = \sqrt{4} = 2$, $r = \frac{16}{4} = 4$, чего ради оба квадратныя уравненія будутъ $xx = 2x + 2$ и $xx = -2x - 6$; слѣд. корни $x = 1 \pm \sqrt{3}$, и $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

774.

Для большаго изъясненія предложеннаго рѣшенія повторимъ оное снова въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть будетъ данное уравненіе $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, которое должно содержаться въ формулѣ $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, гдѣ въ первой части положено $-3x$ для того, что -3 есть поло:

половина числа во второмъ членѣ уравненія -6, и разрѣшивъ сію формулу выдетъ $x^4-6x^3+(2p+9-qq)\,xx-(6p+2qr)\,x+pp-rr=0$. Сію формулу сравнивая съ даннымъ уравненіемъ получатся I) $2p+9-qq=12$, II) $6p+2qr=12$; III) $pp-rr=4$: изъ перваго будетъ $qq=2p-3$; изъ другаго $2qr=12-6p$, или $qr=6-3p$; изъ третьяго $rr=pp-4$. Помножь теперь rr и qq между собою, получится $qqrr=2p^3-3pp-8p+12$, и естьли возмется квадратъ qr, то есть $qqrr=36-36p+9pp$, то получится уравненіе $2p^3-3pp-8p+12=9pp-36p+36$, или $2p^3-12pp+28p-24=0$, или раздѣливъ на 2 $p^3-6pp+14p-12=0$, коего корень $p=2$, откуда $qq=1$ и $q=1$, $qr=r=0$, и такъ уравненіе наше будетъ $(xx-3x+2)^2=xx$, откуда квадратной корень $xx-3x+2=\pm x$. Ежели мѣсто имѣетъ верхней знакъ, то выдетъ $xx=4x-2$, естьли же нижней, то $xx=2x-2$, откуда 4 корня найдутся $x=2\pm\sqrt{2}$, $x=1\pm\sqrt{-1}$.

ГЛАВА XV.

О новомъ рѣшеніи биквадратныхъ уравненій.

775.

Какъ по прежнему правилу Помбелліа биквадратныя уравненіи рѣшатся помощію кубичныхъ, такъ самое тоже учинить можно по найденному послѣ того средству, которое отъ прежняго совсѣмъ различествуетъ, и заслуживаетъ особливое изъясненіе.

776.

Положи будто бы корень биквадратнаго уравненія имѣлъ сію формулу $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ буквы p, q и r означаютъ три корня, такого кубичнаго уравненія какъ $z^3 - fzz + gz - h = 0$, такъ что $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ и $pqr = h$, сіе положивъ возми квадратъ означенной формулы $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, которой будетъ $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq}$

$+ 2$

$+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$, понеже $p+q+r=f$, то будетъ $xx-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$; возми еще квадратъ сего уравненія, которой будетъ $x^4-2xxf+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqqr}+8\sqrt{pqrr}$, и когда $4pq+4pr+4qr=4g$, то перенеся его на другую сторону будетъ $x^4-2xxf+ff-4g=8\sqrt{pqr}.(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$ и когда $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$, а $pqr=h$, такъ что $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, то симъ образомъ получимъ мы сіе биквадратное уравненіе $x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$, коего корень дѣйствительно будетъ $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, гдѣ p, q и r суть три корня прежняго кубичнаго уравненія.

777.

Выведенное такимъ образомъ биквадратное уравненіе, можетъ взято быть за генеральное, хотя въ немъ x^3 и не находится; ибо каждое полное уравненіе можно превратить всегда въ такое, въ которомъ втораго члена не находится,

 находится,

ходится, какъ мы послѣ сего покажемъ. И такъ пусть дано будетъ сіе биквадратное уравненіе $x^4 - axx - bx - c = 0$, коего найти должно корень, сравнивая его съ найденною формулою; а что бы сыскать буквы f, g, h, то требуется чтобъ было I) $2f = a$, т. е. $f = \frac{a}{2}$; II) $8\sqrt{h} = b$ т. е. $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$ и $g = \frac{bb}{64}$; III) $ff - 4g = -c$, или $\frac{aa}{4} - 4g = -c$, или $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, по чему $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

778.

Когда изъ предложеннаго уравненія $x^4 - axx - bx - c = 0$ найдутся буквы f, g, h, такъ что $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, и $h = \frac{1}{64}bb$, или $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$, то оттуда здѣлай уравненіе $z^3 - fzz + gz - h = 0$, коего 3 корня по выше показанному правилу находить должно, и кои будутъ I) $z = p$; II) $z = q$; III) $z = r$, изъ коихъ потомъ, естьли они найдены будутъ, корень нашего биквадратнаго уравненія выдетъ $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

779.

Хотя и кажется, что такимЪ образомЪ нашелся одинЪ только корень нашего уравненія; но поелику каждой квадратной корень, какЪ положительной, такЪ и отрицательной знакЪ при себѣ имѣть можетЪ, по чему формула сія содержитЪ всѣ 4 корня.

Естьли бы вЪ рѣшеніи всѣ перемѣны знаковЪ допущены были, то бы вышли 8 величинЪ для x, изЪ коихЪ однако только 4 мѣсто имѣть могутЪ. При семЪ примѣчать надлежитЪ, что произведеніе изЪ трехЪ членовЪ, т. е. $\sqrt{pqr}$ должно быть равно $\sqrt{g} = \frac{1}{8}b$; откуда ежели $\frac{1}{8}b$ будетЪ положительное число, то и произведеніе 3 хЪ частей положительное, вЪ которомЪ случаѣ только 4 перемѣны быть могутЪ:

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; естьли же $\frac{1}{8}b$ будетЪ число отри-

отрицательное, то 4 величины для x будутъ слѣдующіе:

I) $x = \surd p + \surd q - \surd r$; II) $x = \surd p - \surd q + \surd r$;
III) $x = -\surd p + \surd q + \surd r$; IV) $x = -\surd p - \surd q - \surd r$.
По сему примѣчанію въ каждомъ случаѣ могутъ опредѣлены быть всѣ 4 корня, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

780.

Пусть дано будетъ биквадратное уравненіе, въ которомъ втораго члена не находится $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$; сравнивъ его съ прежнею формулою будетъ $a = 25$, $b = -60$ и $c = 36$, откуда получится $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$; и $h = \frac{225}{4}$, слѣд. кубичное уравненіе будетъ $z^3\ \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$; а что бы изключить отсюда дроби, то положи $z = \frac{u}{4}$ и будетъ $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2}.\frac{uu}{16} + \frac{769}{16}.\frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, которое умноживъ на 64 выдетъ $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, изъ котораго три корня найти должно, кои всѣ суть положительные; одинъ изъ нихъ $u = 9$, а

что

что бы сыскать другїе два, то раздѣли уравненїе на $u-9$, и выдетъ сїе новое $uu-41u+400=0$, или $uu=41u-400$, откуда найдется $u=\frac{41}{2}\pm\sqrt{(\frac{1681}{4}-\frac{1600}{4})}=\frac{41\pm9}{2}$; слѣд. искомые 3 корня будутъ $u=9$, $u=16$, $u=25$, откуда получимъ мы: I) $z=\frac{9}{4}$; II) $z=4$; III) $z=\frac{25}{4}$, и сїи суть корни буквъ p, q и r, такъ что $p=\frac{9}{4}$, $q=4$, $r=\frac{25}{4}$; и $\sqrt{pqr}=\sqrt{b}=-\frac{15}{2}$, то есть равно числу отрицательному; чего ради въ разсужденїи знаковъ корней $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ должно смотрѣть на оное, а именно или одинъ изъ нихъ или всѣ три будутъ отрицательные. Но когда $\sqrt{p}=\frac{3}{2}$, $\sqrt{q}=2$ и $\sqrt{r}=\frac{5}{2}$, то 4 корня предложеннаго уравненїя будутъ:

I) $x=\frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}=1$

II) $x=\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=2$

III) $x=-\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=3$

IV) $x=-\frac{3}{2}-2-\frac{5}{2}=-6$, откуда произходятъ сїи 4 множителя уравненїя:

$(x$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0$, изЪ коихЪ два первые даютЪ $xx-3x+2$, а два послѢдніе $xx+3x-18$, и сіи два произведенія помноженныя между собою даютЪ точно наше уравненіе.

781.

Осталось еще показать, какимЪ образомЪ биквадратное уравненіе, вЪ которомЪ второй членЪ есть, превратить вЪ другое, вЪ которомЪ бы его не было; кЪ сему служитЪ слѢдующее правило.

Пусть дано будетЪ сіе генеральное уравненіе $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$, приложи кЪ y четвертую часть числа при второмЪ членѢ находящагося $\frac{1}{4}a$, и напиши мѢсто онаго другую букву x, такЪ чтобЪ $y+\frac{1}{4}a=x$, слѢд. $y=x-\frac{1}{4}a$, отсюда будетЪ $yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa$; $y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3$, и наконецЪ

$y^4=x^4$

$$\begin{array}{rl} y^4 = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}aaxx - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 \\ +ay^3 = & + ax^3 - \frac{3}{4}aaxx + \frac{3}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4 \\ +byy = & + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\ +cy = & + cx - \frac{1}{4}ac \\ +d = & + d \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - \frac{3}{8}aaxx + \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{256}a^4 \\ + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\ + cx - \frac{1}{4}ac + d \end{array}\right\} = 0$$

Гдѣ какъ видно втораго члена не находится, такъ что данное правило при немъ теперь употребивъ 4 корня x найти можно, изъ коихъ потомъ величины y сами собою означатся, ибо $y = x - \frac{1}{4}a$.

782.

Далѣе четвертой степени рѣшенїе алгебраическихъ уравненїй не простирается, и всѣ старанїя разрѣшать подобнымъ образомъ уравненїя 5той и вышшихъ степеней, или привести ихъ по крайней мѣрѣ въ уравненїя нижнихъ степеней были тщетны, такъ что не возможно

можно

можно ни коимЪ образомЪ дать генеральнаго правила находить корни вышшихЪ степеней, и все что вЪ разсужденіи сего ни изобрѢтено, не простирается далѢе, какЪ только до такихЪ уравненій, гдѢ раціональной корень содержится, которой чрезЪ пробу легко найти можно, будучи извѢстно, что оной долженЪ быть дѢлителемЪ послѢдняго члена, сЪ коимЪ также точно поступать надлежитЪ, какЪ уже вЪ кубичныхЪ и биквадратныхЪ уравненіяхЪ нами показано было.

783.

Не безнужно также здѢсь показать употребленіе сего правила вЪ уравненіяхЪ имѢющихЪ неизвлекомые корни.

Пусть такое уравненіе будетЪ $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8$. Прежде всего надлежитЪ здѢсь выключить второй членЪ, для чего кЪ числу y приложи еще четвертую часть числа при второмЪ членѢ находящагося, т. е. $y - 2 = x$ и $y = x + 2$, по чему $yy = xx + 4x + 4$; $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$

и

$$\begin{array}{rcl} \text{и } y^4 & = & x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16 \\ -8y^3 & = & -8x^3 - 48xx - 96x - 64 \\ +14yy & = & +14xx + 56x + 56 \\ +4y & = & +4x + 8 \\ -8 & = & -8 \\ \hline & & x^4 - 10xx - 4x + 8 = 0 \; ; \end{array}$$

Сіе уравненіе сравнивъ съ генеральною нашею формулою, найдется $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; откуда заключаемъ $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$, $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$; изъ чего видно что произведеніе $\sqrt{pqr}$ будетъ положительное, и по семv кубичное уравненіе должно быть $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, изъ котораго должно найти три корня p, q и r.

781.

Въ семъ случаѣ съ самаго начала, должно изъ уравненія изключить дроби; положивъ $z = \frac{u}{2}$, будетъ $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, и помноживъ на 8, выдетъ $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$; гдѣ всѣ корни суть положительные: и когда дѣлители послѣдняго

члена суть 1 и 2, то положи сперва $u = 1$ и будетъ $1 - 10 + 17 - 2 = 6$, и слѣд. не 0, а ежели положишь $u = 2$, то выдетъ $8 - 40 + 34 - 2 = 0$; почему $u = 2$ есть одинъ корень сего уравненія; а что бы найти и другіе два, то раздѣли оное уравненіе на $u - 2$ какъ слѣдуетъ:

$$
\begin{array}{l|l|l}
u - 2 & u^3 - 10uu + 17u - 2 & uu - 8u + 1 \\
 & \underline{u^3 - 2uu} & \\
 & \quad - 8uu + 17u & \\
 & \quad \underline{- 8uu + 16u} & \\
 & \qquad\qquad + u - 2 & \\
 & \qquad\qquad \underline{+ u - 2} &
\end{array}
$$

И произойдетъ $uu - 8u + 1 = 0$, или $uu = 8u - 1$, откуда оба остальные корня $u = 4 \pm \sqrt{15}$; и когда $z = \frac{1}{2}u$, то 3 корня кубичнаго уравненія будутъ: I) $z = p = 1$; II) $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$; III) $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$.

785.

Когда мы нашли p, q и r, то квадратные корни ихъ будутъ $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2}$;

$\sqrt{r}$

$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}$; выше же сего показано было, что квадратной корень изЪ $(a \pm \sqrt{b})$, положивЪ $\sqrt{(aa - b)} = c$, изображается такЪ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, то вЪ нашемЪ примѣрѣ имѣя $a = 8$ и $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$ и $b = 60$, откуда $c = 2$, получимЪ мы $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, и $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$; и когда $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$. то четыре величины изображающія x будутЪ слѣдующіе, зная что ихЪ произведеніе должно быть положительное.

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$

II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$

III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$

 Понеже

Понеже въ квадратномъ уравненіи было $y = x + 2$, то 4 корня онаго будутъ: I) $y = 3 + \sqrt{5}$; II) $y = 3 - \sqrt{5}$; III) $y = 1 + \sqrt{3}$; IV) $y = 1 - \sqrt{3}$.

ГЛАВА XVI.

О разрѣшеніи уравненій чрезъ приближеніе.

786.

Ежели уравненіе не имѣетъ раціональныхъ корней, не смотря на то можно ли ихъ будетъ изъявить коренными знаками, или нѣтъ, какъ въ вышшихъ уравненіяхъ дѣлается, то должно довольствоваться изобрѣтеніемъ величины чрезъ приближеніе, такъ что къ точному знаменованію оныя всегда ближе подходить можно, то есть, до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почестъся можетъ. На сей конецъ различныя изобрѣтены средства, изъ коихъ знатнѣйшія мы здѣсь изъяснить намѣрены.

787.

Первой способъ состоитъ въ томъ, когда величина одного корня довольно уже близко къ точности подходитъ, какъ напр. ежели извѣстно будетъ, что оной больше 4, а меньше 5, то тогда кладется величина сего корня $=4+p$, гдѣ p дѣйствительно означаетъ дробь, когда же p будетъ дробь меньше 1, то квадратъ ея pp долженъ быть гораздо меньше, а кубъ p^3 и слѣдующія степени будутъ уже такъ малы, что ихъ изъ выкладки опустить можно, потому что здѣсь ищется не самая величина p, но только ближайшая ей. И такъ когда дроби p ближайшая величина опредѣлена будетъ, то изъ того уже корень $4+p$ гораздо точняе сыщется. Симъ образомъ опредѣлить можно корень еще точняе, употребляя предписанное дѣйствїе до тѣхъ поръ, пока къ правдѣ подойдешь такъ близко, какъ пожелаешь.

788.

Сіе правило изъяснимъ мы самымъ легкимъ примѣромъ, и станемъ искать чрезъ приближеніе корень уравненія $xx=20$.

Здѣсь видно, что x больше 4хъ, а меньше 5ти и для того положивъ $x=4+p$, будетъ $xx=16+8p+pp=20$; но поелику pp очень мало, то выпусти его изъ уравненія, чтобъ получить $16+8p=20$, или $8p=4$, откуда будетъ $p=\frac{1}{2}$ и $x=4\frac{1}{2}$, которой уже къ правдѣ гораздо ближе подходитъ; посемъ положи еще $x=4\frac{1}{2}+p$, то видно, что p должна быть дробь гораздо меньше прежней, и слѣд. pp съ большимъ правомъ опущено быть можетъ; почему $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, или $yp=-\frac{1}{4}$, и $p=-\frac{1}{36}$. слѣд. $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$. Естьли бы понадобилось подойти къ правдѣ еще ближе, то положи $x=4\frac{17}{36}+p$, и будетъ $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$ и $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$; умноживъ на 36 выдетъ $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, $p=-\frac{1}{36.322}=-\frac{1}{11592}$, слѣд. $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5473}{11592}$. Сіе число къ точному корню уже такъ близко подходитъ,

что

что погрѣшность за ничто почесться можетъ.

789.

Дабы сіе показать вообще, то пусть предложено будетъ уравненіе $xx = a$, и извѣстно бы было, что x больше нежели n, а меньше нежели $n + 1$; тогда положи $x = n + p$, такъ, что p дробь означаетъ, и слѣд. pp какъ очень малая дробь изъ уравненія отметается; чего ради получится $xx = nn + 2np = a$, слѣд. $2np = a - nn$ и $p = \frac{a - nn}{2n}$; почему $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$, и ежели n къ правдѣ уже блиско подходило, то новая величина $\frac{nn + a}{2n}$ будетъ еще ближе къ оной. Сію найденную величину положи опять мѣсто n, и подойдешь къ правдѣ еще ближе, и когда сію положишь еще разъ мѣсто n, то подойдешь уже несравненно ближе къ правдѣ. Симъ образомъ дѣйствіе сіе продолжать можно до тѣхъ поръ, какъ пожелаешь. Пусть будетъ наприм. $a = 2$, или ищется квадратной корень изъ 2: естьли уже найдена довольно

близко къ точному корню подходящая величина, которая положена n, то $\frac{nn+2}{2n}$ дастъ еще точнѣйшую величину.

И такъ пусть будетъ. I) $n=1$, то будетъ $x=\frac{3}{2}$

II) $n=\frac{3}{2}$ — — — $x=\frac{17}{12}$

III) $n=\frac{17}{12}$ — — — $x=\frac{577}{408}$

Сія послѣдняя величина такъ близко къ $\sqrt{2}$ подходитъ, что квадратъ ея $\frac{332929}{166464}$ только дробью $\frac{1}{166464}$ больше 2хъ.

790.

Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ ежели дано будетъ кубичное, или еще вышшее уравненіе.

Пусть дано будетъ сіе кубичное уравненіе $x^3=a$, или ищется $\sqrt[3]{a}$, и пусть оной будетъ почти n, то положи $x=n+p$, опустивъ pp и вышшую степень будетъ $x^3=3nnp+n^3=a$, слѣдов. $3nnp=a-n^3$, и $p=\frac{a-n^3}{3nn}$, почему $x=\frac{2n^3+a}{3nn}$; и ежели n уже близко къ $\sqrt[3]{a}$ под-

подходитъ, то сія формула будетъ къ оному еще ближе, а положивъ сію новую величину мѣсто n, будетъ къ правдѣ подходить несравненно ближе, и сіе дѣйствіе продолжать можно по желанію.

Пусть будетъ напр. $x^3 = 2$, или ищется $\sqrt[3]{2}$, къ коему число n уже близко подходитъ, то формула $\frac{2n^3+2}{3nn}$ будетъ къ нему еще ближе,

положивъ I) $n = 1$ будетъ $x = \frac{4}{3}$
II) $n = \frac{4}{3}$ — — — $x = \frac{91}{72}$
III) $n = \frac{91}{72}$ — — — $x = \frac{1621308961}{1286342294}$.

791.

Сей способъ находить корни чрезъ приближеніе, можно употреблять съ равнымъ успѣхомъ во всѣхъ уравненіяхъ. На сей конецъ пусть дано будетъ генеральное кубичное уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, въ которомъ n уже близко къ

корню его подходитъ; положи $x = n - p$, и когда p должна быть дробь, то pp и протчія вышшія степени онаго изъ уравненія выпустивъ получатся $xx = nn - 2np$ и $x^3 = n^3 - 3nnp$, откуда произходитъ сіе уравненіе $n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, или $n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p$, слѣдов $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$, и такъ мѣсто x получимъ слѣдующее точнѣйшее знаменованіе: $x = n - \frac{n^3 - ann - bn - c}{3nn + 2an + b} = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$; и естьли сія новая величина положится опять мѣсто n, то получится величина, которая къ правдѣ еще ближе подходитъ.

792.

Пусть будетъ напр. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$, $b = 3$ и $c = -50$, слѣд. когда n уже близко къ корню подходитъ, то еще ближайшая величина будетъ $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$; но знамено-

ваніе

ваніе $x = 3$ уже довольно близко къ настоящему корню подходитъ, того ради положи $n = 3$, и получится $x = \frac{61}{21}$, и естьли бы сію дробь положить еще вмѣсто n, то нашлася бы другая величина, къ точному корню гораздо ближе подходящая.

193.

Для вышшихъ степеней присовокупимъ здѣсь сей только примѣръ $x^5 = 6x + 10$, или $x^5 - 6x - 10 = 0$, гдѣ какъ видно 1 мала, а 2 велико. Пусть будетъ $x = n$, ближайшей величинѣ къ искомому корню, и положи $x = n + p$, то будетъ $x^5 = n^5 + 5n^4p$, и слѣд. $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, или $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$, откуда $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$; почему $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$, положи теперь $n = 1$, то будетъ $x = \frac{14}{-1} = -14$, которая величина къ рѣшенію даннаго вопроса совсѣмъ не годится, сіе произходитъ по той причинѣ, что ближайшая величина корню n, была взята

очень

очень мала; чего ради положи $n = 2$ и будетъ $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, которая дробь къ правдѣ уже гораздо ближе подходитъ, и естьли бы кто похотѣлъ трудъ на себя принять, положить дробь $\frac{69}{37}$ мѣсто n, то сыскалась бы величина къ точному корню x уже несравненно близка.

794.

Сіе обыкновенное средство находить корни уравненія чрезъ приближеніе, во всѣхъ случаяхъ съ пользою употребляшь можно.

Но сверьхъ сего намѣрены мы здѣсь показать еще другое средство, которое для легкости своей въ вычисленіи достойно примѣчанія. Основаніе онаго состоитъ въ томъ, что для каждаго уравненія надлежитъ сыскать рядъ чиселъ какъ: a, b, c, d и пр. которые бы были тако о состоянія, что ежели каждой членъ раздѣлится на послѣдующей; въ частномъ бы выходила величина кор-

ня

ня тѣмъ аккуратнѣе, чѣмъ далѣе сей рядъ чиселъ продолжать будешь.

Положимъ, что въ семъ ряду чиселъ дошли мы уже до членовъ: p, q, r, s, t и пр. то $\frac{q}{p}$ должно дать корень x уже довольно аккуратенъ, или $\frac{q}{p}$ должно быть почти равно x; также и $\frac{r}{q} = x$, откуда мы чрезъ умноженіе получаемъ $\frac{r}{p} = xx$, и когда еще $\frac{s}{r} = x$, то такожде будетъ $\frac{s}{p} = x^3$, потомъ еще $\frac{t}{s} = x$ а $\frac{t}{p} = x^4$ и такъ далѣе.

795.

Для изъясненія сего начнемъ съ квадратнаго уравненія $xx = x + 1$. Когда въ вышепомянутомъ ряду находятся члены p, q, r, s, t и пр. то $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$, и отсюда получаемъ мы уравненіе $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, или $q + p = r$, также будетъ $s = r + q$, и $t = s + r$, откуда мы познаемъ, что каждый членъ въ нашемъ ряду есть сумма двухъ предъидущихъ, почему помянутой рядъ чиселъ

можно

можно продолжать такъ далеко, какъ похочется, ежели только два первые члена извѣстны будутъ, которые можно брать по изволенію. Чего ради положивъ ихъ 0, 1, получится рядъ чиселъ

0, 1, 1, 2, 3 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и такъ далѣе. Въ семъ ряду каждой изъ отдаленныхъ членовъ раздѣленный на свой предъидущей, величину x тѣмъ точнѣе опредѣляетъ, чѣмъ далѣе рядъ продолженъ будетъ. Сначала ошибка, хотя и очень велика будетъ; однако она тѣмъ менше становится, чѣмъ далѣе рядъ продолжается. Сіи часъ отъ часу къ правдѣ приближающіяся величины для x идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}$$ и пр.

изъ коихъ напр. $x = \frac{21}{13}$ даетъ $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, и погрѣшность состоитъ только изъ дроби $\frac{1}{169}$, а слѣдующія дроби къ правдѣ еще ближе подходятъ.

796.

Разсмотримъ теперь такожде и сіе уравненіе $xx = 2x + 1$. Понеже завсегда $x = \frac{q}{p}$ и $xx = \frac{r}{p}$, то получимъ мы $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, или $r = 2q + p$. Отсюда знаемъ мы, что каждой членъ два раза взятой вмѣстѣ съ своимъ предъидущимъ даетъ слѣдующей членъ; чего ради начавъ опять съ 0, 1, получимъ слѣдующей рядъ:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 и пр.

и искомая величина x слѣдующими дробями часъ отъ часу аккуратнѣе опредѣлится $x = \frac{1}{0}; \frac{2}{1}; \frac{5}{2}; \frac{12}{5}; \frac{29}{12}; \frac{70}{29}; \frac{169}{70}; \frac{408}{169}$ и пр. кои къ точной величинѣ $x = 1 + \sqrt{2}$ всегда приближаются, а отнявъ 1, слѣдующія дроби величину $\sqrt{2}$ даютъ часъ отъ часу точнѣе $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}; \frac{41}{29}; \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$ и протч. изъ коихъ квадратъ $\frac{99}{70} = \frac{9801}{4900}$, только $\frac{1}{4900}$ больше нежели 2.

797.

Въ уравненіяхъ вышшихъ степеней, сей способъ равнымъ образомъ употреблять можно, такъ ежели бы дано было сіе кубичное уравненіе:

x^3

$x^3 = xx + 2x + 1$, то положивъ $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ и $x^3 = \frac{s}{p}$, получится $s = r + 2q + p$; откуда видно, какъ изъ трехъ членовъ p, q и r слѣдующей находить должно, въ которомъ случаѣ начальныя числа опять взять можно по изволенію; почему будетъ у насъ сей рядъ:

0, 0, 1, 1, 3 6, 13, 28, 60, 129 и пр. откуда за слѣдующіе дроби всегда аккуратнѣе величину x опредѣляютъ:

$x = \frac{0}{0}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{60}{28}$, $\frac{129}{60}$ и пр. первыя изъ сихъ дробей ужасно разнятся отъ точнаго корня, но $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ даетъ въ уравненіи $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$ разность $\frac{13}{343}$.

798.

Здѣсь надлежитъ примѣчать, что не во всякомъ уравненіи сей способъ употреблять можно, особливо гдѣ втораго члена не находится, тамъ ево употребить не льзя; ибо пусть будетъ напр. $xx = 2$, и положи $x = \frac{q}{p}$, и $xx = \frac{r}{p}$, то произойдетъ $\frac{r}{p} = 2$, или $r = 2p$, то есть, $r = 0q + 2p$, откуда произойдетъ сей рядъ чиселъ:

1,

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 и пр. изЪ коего ни чего заключить не можно; ибо каждой послѣдующей членЪ раздѣленЪ будучи на свой предЪидущей даетЪ $x=1$ или $x=2$. Но сїю неспособность отвратить можно положивЪ $x=y-1$; ибо тогда получится $yy-2y+1=2$ или $yy=2y+1$, и ежели здѣсь положится $y=\frac{p}{q}$ и $yy=\frac{r}{p}$, то выдетЪ выше сего найденное приближенїе.

799.

СимЪ же образомЪ поступать надлежитЪ и сЪ уравненїемЪ $x^3=2$, изЪ коего хотя такого ряда чиселЪ, которой бы опредѣлялЪ намЪ величину x найти и не можно; однакожЪ положивЪ $x=y-1$, выдетЪ уравненїе $y^3-3yy+3y-1=2$ или $y^3=3yy-3y+3$, вЪ которомЪ естли положится $y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$, $y^3=\frac{s}{p}$, то выдетЪ $s=3r-3q+3p$; откуда видно, какЪ изЪ трехЪ членовЪ слѣдующей опредѣлять должно. Первые 3 члена взявЪ по изволенїю напр. 0, 0, 1, получится

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 ипр. изъ коего два послѣдніе члена даютъ $y = \frac{324}{144}$ и $x = \frac{5}{4}$, которая дробь къ кубичному корню изъ 2 хъ довольно близко подходитъ; ибо кубъ $\frac{5}{4} = \frac{125}{64}$, а $2 = \frac{128}{64}$.

800.

При семъ способѣ еще примѣчать надлежитъ, что когда уравненіе имѣетъ раціональные корни, и начало ряда возмется такъ чтобъ оттуда вышли сіи корни, то каждой членъ онаго раздѣленъ будучи на свой предъидущей, дастъ тотъ же точно корень.

Что бы сіе показать, то пусть дано будетъ уравненіе $xx = x + 2$, коего одинъ корень $x = 2$, и для составленія ряда чиселъ изъ даннаго уравненія дана будетъ формула $r = q + 2p$, и ежели начало его положится 1, 2, то получится рядъ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ипр. которой есть прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 2.

Тоже

Тоже самое явствуетъ изъ кубичнаго уравненія $x^3 = xx + 3x + 9$, котораго одинъ корень $x = 3$, и ежели начало ряда положится 1, 3, 9, то изъ формулы $s = r + 3q + 9p$ найдется рядъ 1,3,9, 27, 81, 243, 729 ипр. которой будетъ опять прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 3.

801.

Естьли же ряда начало съ симъ корнемъ не сходно будетъ, то оттуда не слѣдуетъ, что чрезъ то всегда ближе къ нему подходить можно; ибо ежели уравненіе имѣетъ больше одного корня, то рядъ приближается всегда къ большему изъ оныхъ, а меньшаго иначе получить не льзя, какъ только когда начало ряда точно по оному разположится. Сіе примѣромъ лутче изъяснить можно,

Когда дано будетъ уравненіе $xx = 4x - 3$, въ коемъ два корня суть $x = 1$ и $x = 3$, а формула для ряда чиселъ $r = 4q - 3p$, то положи начало ряда 1, 1, то

 есть,

есть, для меншаго корня, и будетъ весь рядъ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, и пр. когда же начало ряда положится 1, 3, въ которомъ большей корень содержится, то весь рядъ будетъ:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. въ которомъ всѣ члены корень 3 точно опредѣляютъ.

Естьли же начало ряда возмется по изволенію, такъ что въ немъ меншей корень не точно содержится, то рядъ приближается всегда къ большему корню 3, какъ изъ слѣдующихъ рядовъ видно:

Начало 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 и пр.
– – – 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 и пр.
– – – 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095 и пр.
– – – 2, 1, –2, –11, –38, –118, –362, –1091, –3278 и пр.

Гдѣ послѣдующіе члены раздѣлены будучи на предъидущіе всегда производятъ частныя, ближайшія большему корню, а меншему никогда.

802.

802.

Сей способЪ можно употреблять и при такихЪ уравненіяхЪ, которыя безконечно продолжаются. ВЪ примѢрЪ служить можетЪ сіе уравненіе:

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{и пр.}$$

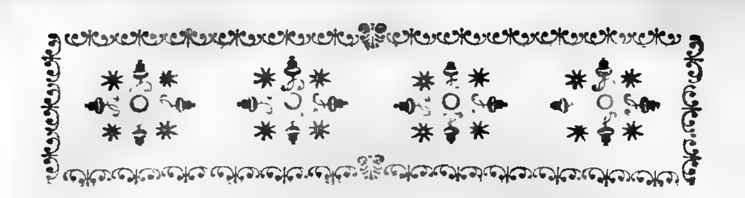
для котораго рядЪ чиселЪ долженЪ быть такого состоянія, чтобЪ каждой вЪ немЪ членЪ равенЪ былЪ суммѢ всѢхЪ предЪидущихЪ, откуда произойдетЪ рядЪ 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, и пр. изЪ чего видно, что самой большой корень сего уравненія будетЪ точно $x = 2$, что также показано быть можетЪ и симЪ образомЪ; раздѢли данное уравненіе на x^{∞}, и получится

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ и прочч., что производитЪ геометрическую прогрессію, коей сумма $= \frac{1}{x-1}$, такЪ что $1 = \frac{1}{x-1}$ будучи умножено на $x-1$ даетЪ $x-1=1$ и $x=2$.

803.

Сверьхъ сихъ двухъ способовъ находить корни уравненія чрезъ приближеніе, есть еще и другіе, но которые по большой части или пространны, или не генеральны. Предъ всѣми такими способами заслуживаетъ преимущество съ начала изъясненной, какъ такой, которой во всѣхъ уравненіяхъ съ желаемымъ успѣхомъ употребленъ быть можетъ; другой же напротивъ того требуетъ иногда въ уравненіи нѣкоторое пріуготовленіе, безъ котораго и употребить его нельзя, какъ уже мы въ предложенныхъ здѣсь примѣрахъ показали.

Конецъ четвертой части объ алгебраическихъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.



ЧАСТЬ ПЯТАЯ

о неопредѣленной аналитикѣ.

ГЛАВА I

О разрѣшенїи такихъ уравненїй, въ которыхъ больше нежели одно неизвѣстное число находится.

804.

Изъ прежняго явствуетъ, какимъ образомъ одно неизвѣстное число изъ одного уравненїя, два неизвѣстныя изъ двухъ, три изъ трехъ, четыре изъ четырехъ и такъ далѣе опредѣлить можно; такъ что завсегда требуется столько уравненїй, сколько неизвѣстныхъ чиселъ

опредѣлить должно, и тогда самой вопросъ будетъ опредѣленнымъ.

Естьли же изъ вопроса меньше выдетъ уравненій, нежели сколько неизвѣстныхъ чиселъ, то будутъ нѣкоторыя изъ нихъ неопредѣленными и оставляются на наше произволеніе; почему такіе вопросы *неопредѣленными* называются, и составляютъ особливую аналитики часть, которая *неопредѣленною Аналитикою* обыкновенно именуется.

805.

Понеже въ сихъ случаяхъ одно или больше неизвѣстныхъ чиселъ по изволенію брать можно, то имѣютъ здѣсь мѣсто многія рѣшенія.

Но обыкновенно присовокупляется здѣсь еще сей договоръ, чтобъ искомыя числа были цѣлыя, да притомъ и положительныя или по крайней мѣрѣ раціональныя, чрезъ что число всѣхъ возможныхъ рѣшеній чрезмѣрно ограничивается, такъ что нѣкоторыя не многія хотя часто же и безконечно многія; но кои

не

не столь легко видѣть можно, имѣютъ мѣсто, а иногда и совсѣмъ ни одного не возможно: почему сїя аналитики часть совсѣмъ особливые прїемы требуетъ и не мало служитъ къ изощренїю разума начинающихъ и большее имъ проворство въ исчисленїи приноситъ.

806.

Начнемъ съ самаго легкаго вопроса и будемъ искать два числа, коихъ бы сумма равна была 10; при чемъ разумѣется, что сїи числа цѣлыя и положительныя быть должны.

Пусть оныя числа будутъ x и y, такъ что $x+y=10$, откуда найдется $x=10-y$, и такъ y иначе опредѣлить не льзя, какъ только что оно цѣлое и положительное число быть должно, и по сему можно бы было взять вмѣсто y всѣ цѣлыя числа, отъ 1 безконечно многїя; но понеже x также положительнымъ быть долженъ, то y больше 10 взять не льзя, потому что иначе былъ бы x

отрицательнымъ, и когда о также не долженъ входить въ выкладку, то самой большой y будетъ 9, ибо въ противномъ случаѣ былъ бы $x=0$; почему слѣдующія только рѣшенія мѣсто имѣютъ.

Когда $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$,
то $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$;
но изъ сихъ 9 рѣшеній послѣднія 4 съ первыми 4мя одинаковы, и для того всѣхъ навсе 5 только разныхъ рѣшеній.

Естьли же бы потребны были 3 числа, коихъ бы сумма была 10, то надлежало бы только одно изъ найденныхъ здѣсь чиселъ раздѣлить еще на двѣ части, откуда вышло бы большее число рѣшеній.

807.

Понеже въ семъ никакой нѣтъ трудности, то приступимъ теперь къ нѣсколько трудноватымъ вопросамъ.

Вопросъ. Раздѣлить 25 на двѣ части, изъ которыхъ бы одна на 2, а другая на 3 могла раздѣлиться?

Пусть

Пусть будетъ одна часть $2x$, а другая $3y$, то $2x + 3y = 25$, слѣдовательно $2x = 25 - 3y$, раздѣливъ на 2 получится $x = \frac{25 - 3y}{2}$, откуда усматриваемъ мы вопервыхъ, что $3y$ должны быть меньше 25ти и по сему y не можетъ быть больше 8ми; изключивъ цѣлыя числа сколько возможно, будетъ $x = \frac{24 + 1 - 2y - y}{2}$, или $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$: и такъ $1 - y$, или $y - 1$ на 2 дѣлиться должны, чего ради положи $y - 1 = 2z$, то $y = 2z + 1$ будетъ $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$, а понеже y не болѣе 8ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чиселъ взять не можно, какъ только тѣ кои $2z + 1$ не больше 8ми составляютъ, слѣдовательно z долженъ быть меньше 4хъ, и по сему z не больше 3хъ взять можно, откуда сии слѣдуютъ рѣшенія:

положивъ	$z = 0$	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$
будетъ	$y = 1$	$y = 3$	$y = 5$	$y = 7$
и	$x = 11$	$x = 8$	$x = 5$	$x = 2$

И

И такъ искомыя двѣ части будутъ слѣдующія: I) $22+3$; II) $16+9$; III) $10+15$, IV) $4+21$.

808.

Вопросъ. раздѣлить 100 на 2 части, такъ что первая на 7, а другая на 11 могла раздѣлиться?

Пусть будетъ первая $7x$, а другая $11y$, то должно $7x+11y=100$, откуда $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}=14-y+\frac{2-4y}{7}$; и такъ $2-4y$, или $4y-2$, должны дѣлиться на 7, а когда $4y-2$ на 7 могутъ раздѣлиться, то и половина ихъ $2y-1$ также раздѣлится, чего ради положи $2y-1=7z$, или $2y=7z+x$: будетъ $x=14-y-2z$; но когда $2y=7z+1=6z+z+1$, выдетъ $y=3z+\frac{z+1}{2}$.

Положивъ теперь $z+1=2u$, или $z=2u-1$ будетъ $y=3z+u$. Теперь вмѣсто u можно взять каждое цѣлое число, по которому бы ни x ни y отрицательными не были,

были, то получится $y=7u-3$, а $x=19-11u$. По первой формулѣ $7u$ должно быть больше 3хъ, а по второй, $11u$ меньше 19ти, или u меньше нежели $\frac{19}{11}$, такъ что u не можетъ быть 2, но оно также и 0 быть не можетъ, то остается одна только его величина $u=1$, откуда получится $x=8$ и $y=4$, слѣдовательно обѣ искомыя части ста будутъ Iя 56, а IIя 44.

809.

Вопросъ раздѣлить 100 на двѣ такія части, что ежели первую раздѣлишь на 5, тебѣ осталось 2, а когда другую раздѣлишь на 7, въ остаткѣ чтобъ было 4?

Когда отъ раздѣленія первой части на 5 въ остаткѣ должны быть 2, то положи оную $5x+2$, и понеже другая часть раздѣленная на 7 должна дать остатокъ 4, то пусть она будетъ $7y+4$, и такъ $5x+7y+6=100$, или $5x=94-7y=90+4-5y-2y$, почему $x=18-y-\frac{2y+4}{5}$,

слѣдо-

слѣдовательно $4-2y$, или $2y-4$, или половина сего $y-2$ должна раздѣлиться на 5; чего ради положи $y-2=5z$, или $y=5z+2$ будетъ $x=16-7z$, откуда явствуетъ, что $7z$ должны быть меньше 16ти, слѣдовательно z меньше нежели $\frac{16}{7}$ и такъ не больше 2хъ, почему имѣемъ мы здѣсь 3 рѣшенія;

Iе $z=0$ даетъ $x=16$ и $y=2$, слѣдовательно обѣ искомыя части будутъ $82+18$.

IIе $z=1$ будетъ $x=9$ и $y=7$, слѣдовательно обѣ части $47+53$.

IIIе $z=2$ даетъ $x=2$ и $y=12$, почему обѣ части $12+88$.

810.

Вопросъ. Двѣ крестьянки имѣютъ вмѣстѣ 100 яицъ, одна говоритъ, ежели я свои по 8 щитать стану, то останется у меня 7, другая говоритъ, а когда я свои по 10 щитать буду, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7: спрашивается сколько каждая яицъ имѣла?

Понеже

Понеже число первой раздѣленное на 8 даетъ въ остаткѣ 7, а число другой раздѣленное на 10 также даетъ остатокъ 7, то положи число первой $= 8x + 7$, а другой $= 10y + 7$, то будетъ $8x + 10y + 14 = 100$, или $8x = 86 - 10y$, или $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$; откуда найдется $x = 10 - y + \frac{3-y}{4}$: и такъ $3 - y$, или $y - 3$ на 4 дѣлиться должно, чего ради положи $y - 3 = 4z$, будетъ $y = 4z + 3$ и $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$, слѣдовательно $5z$ должны быть меньше нежели 7 и такъ z меньше 2хъ, почему слѣдующія два рѣшенія выходятъ:

Iе $z = 0$ даетъ $x = 7$ и $y = 3$, по сему у первой крестьянки было 63 яица, а у другой 37.

IIе $z = 1$ даетъ $x = 2$ и $y = 7$ и такъ у первой было 23 яица а у другой 77.

811.

Вопросъ. Въ нѣкоторой компаніи мущины и женщины издержали вмѣстѣ 1000 копѣекъ, каждой мущина заплатилъ 19 копѣекъ, а каждая женщина 13 коп. спра-

шивается

шивается сколько было мущинъ и сколько женщинъ?

Пусть будетъ число мущинъ $=x$, а женщинъ $=y$, то получится сїе уравненїе $19x+13y=1000$; изъ сего найдется $13y=1000-19x$ или $13y=988+12-13x-6x$, слѣдовательно $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$, и такъ $12-6x$ или $6x-12$ и шестая также онаго часть $x-2$ должна дѣлиться на 13, то положи $x-2=13z$ будетъ $x=13z+2$ и $y=76-13z-2-6z$, или $y=74-19z$, почему z долженъ быть менше нежели $\frac{74}{19}$ и слѣдовательно менше 4хъ, откуда слѣдующїя 4 рѣшенїя мѣсто имѣютъ:

Iе $z=0$ даетъ $x=2$ и $y=74$ такимъ образомъ было двое мущинъ и 74 женщины, тѣ за платили 38 копѣекъ, а сїи 962 копѣйки.

IIе $z=1$ даетъ число мущинъ $x=15$, а число женщинъ $y=55$; тѣ издержали 285 коп., а сїи 715 коп.

IIIе $z=2$ даетъ число мущинъ $x=28$, а число женщинъ $y=36$; тѣ истратили 532 коп., а сїи 468 коп.

IVе

IVе $z=3$ даетъ число мущинъ $x=41$, а число женщинъ $y=17$, тѣ заплатили 779 коп.; а сіи 221. коп.

812

Вопросъ. Одинъ дворянинъ купилъ лошадей и быковъ вмѣстѣ за 1770 р. талеровъ, за каждую лошадь платилъ онъ 31 тал., а за каждаго быка 21 р. талеръ. Спрашивается сколько было лошадей и сколько быковъ?

Пусть будетъ число лошадей x; а быковъ y, то должно быть $31x+21y=1770$, или $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, слѣдовательно $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$. По сему должно $10x-6$, или также половина сего $5x-3$ раздѣлится на 21. Положи $5x-3=21z$, будетъ $5x=21z+3$, слѣдовательно $y=84-x-2z$, но $x=\frac{21z+3}{5}$ или $=4z\frac{+z+3}{5}$; вмѣсто $z+3$ возми $5u$ будетъ $z=5u-3$, $x=21u-12$ и $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$, и по сему u должно быть больше нежели, 0; однако

П меньше-

меньше $4x$Ъ, откуда получаемЪ мы сіи 3 рѣшенія.

Iе $u=1$ даетЪ число лошадей $x=9$, а быковЪ $y=71$, тѣ стоили 279 рейх. талер., а сіи 1491, вмѣстѣ 1770 р. талер.

IIе $u=2$ даетЪ число лошадей $x=30$, а быковЪ $y=40$, тѣ стоятЪ 930 р. тал., а сіи 840, вмѣстѣ 1770 реихсталер.

IIIе $u=3$ даетЪ число лошадей $x=51$, а быковЪ $y=9$, тѣ стоили 1581 р. тал., а сіи 189, вмѣстѣ 1770 рейхсталеровЪ.

813.

Предложенные по сіе мѣсто вопросы ведутЪ насЪ кЪ уравненію $ax+by=c$, гдѣ a, b и c цѣлыя и положительныя числа значатЪ, и вмѣсто x и y такожде цѣлыя и положительныя числа требуются. Но ежели b будетЪ отрицательное, и уравненіе такой видЪ приметЪ $ax=by+c$, то будутЪ вопросы

совсѣмЪ

совсѣмъ особливаго роду и могутъ имѣть безконечное множество рѣшенїй, для которыхъ способъ надлежитъ изъяснить еще въ сей главѣ. Наилегчайшїе сего рода вопросы суть такїе: найти два числа, которыхъ бы разность была 6?

Положи меньшее $= x$, а большее $= y$ будетъ $y - x = 6$, слѣдовательно $y = 6 + x$; здѣсь ничто не препятствуетъ брать вмѣсто x всѣ возможныя цѣлыя числа, и какїя бы взяты ни были, то завсегда y будетъ 6тью больше; возми наприм. $x = 100$ будетъ $y = 106$, откуда явствуетъ, что безконечно многїя рѣшенїя быть могутъ.

814.

По семъ слѣдуютъ вопросы, гдѣ $c = 0$ и ax одному только by равно, т. е. ищется число, которое бы какъ на 5, такъ и на 7 могло раздѣлиться; положи сїе число $= N$, то надлежитъ быть сперва $N = 5x$, потому что число N на 5 дѣлиться должно, а потомъ $N = 7y$, понеже сїе число также и на 7 дѣлить-

 ся

ся долженствуетъ. Отсюда получится $5x = 7y$, слѣдовательно $x = \frac{7y}{5}$; но понеже 7 на 5 раздѣлиться не могутъ, то должно y на оное раздѣлиться, и такъ положи $y = 5z$, будетъ $x = 7z$; слѣдовательно искомое число $N = 35z$, гдѣ вмѣсто z каждое цѣлое число брать можно, такъ что вмѣсто N безконечно многія числа найдутся, кои суть 35, 70, 105, 175, 210 и прочч.

Естьли бы еще сверьхъ сего число N на 9 раздѣлить можно было, то было бы сперьва $N = 35z$, а потомъ $N = 9u$, и оттуда $u = \frac{35z}{9}$ по чему видно, что z на 9 дѣлиться долженъ, и такъ пусть будетъ $z = 9s$, будетъ $u = 35s$, а искомое число $N = 315s$.

815.

Больше трудности бываетъ, ежели число c не 0, такъ когда бы было $5x = 7y + 3$. Сіе уравненіе выходитъ, когда такое число N ищется, которое бы сперьва на 5 дѣлилось, а естьли оно же раздѣ-

раздѣлится на 7, то осталось бы 3. Ибо тогда надлежитъ быть $N = 5x$, а потомъ $N = 7y + 3$, и для того будетъ $5x = 7y + 3$, слѣдовательно $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$; положивъ $2y + 3 = 5z$ будетъ $x = y + z$, но $2y + 3 = 5z$, или $2y = 5z - 3$ будетъ $y = \frac{5z-3}{2}$, или $= 2z \frac{+z-3}{2}$; возми теперь $z - 3 = 2u$ будетъ $z = 2u + 3$, $y = 5u + 6$ и $x = y + z = 7u + 9$, слѣдовательно искомое число $N = 35u + 45$, гдѣ вмѣсто u всѣ цѣлыя числа взяты быть могутъ, да и самыя отрицательныя; чтобъ только N было положительное, что учинится здѣсь ежели $u = -1$; ибо тогда выдетъ $N = 10$, слѣдующія же числа получатся, когда къ оному завсегда придавать будешь 35, и по сему искомыя числа суть 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 и протчая.

816.

Рѣшеніе такихъ вопросовъ основано на содержаніи обоихъ чиселъ, на которыя дѣлить должно, и по свойству оныхъ рѣшеніе бываетъ иногда короче,

иногда пространнѣе; слѣдующей коротко разрѣшится.

Найти число, которое когда раздѣлится на 6, останется 6, а раздѣливъ оное на 13 въ остаткѣ будетъ 3?

Пусть будетъ сїе число N, то во-первыхъ $N = 6x + 2$, а потомъ $N = 13y + 3$, и такъ $6x + 2 = 13y + 3$, и $6x = 13y + 1$, откуда $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$; положи $y + 1 = 6z$, получится $y = 6z - 1$ и $x = 2y + z = 13z - 2$, слѣдовательно искомое число будетъ $N = 78z - 10$, и такїя числа будутъ слѣдующїя: 68, 146, 224, 302, 380 и протч., которыя идутъ въ ариѳметической прогрессїи, коей разность есть $78 = 6.13$, и такъ ежели одно изъ сихъ чиселъ будетъ извѣстно, то всѣ протчїя легко найдутся; ибо надлежитъ только къ онымъ придавать завсегда 78, или изъ онаго вычитать сколько возможно будетъ.

817.

Труднѣе сего примѣръ слѣдующей быть можетъ: сыскать число N, которое

рое будучи раздѣлено на 39 даетъ въ остаткѣ 16, а на 56 раздѣленное даетъ остатокъ 27

Вопервыхъ должно быть $N=39p+16$, а потомъ $N=56q+27$, откуда выдетъ $39p+16=56q+27$, или $39p=56q+11$ и $p=\frac{56q+11}{39}=q+\frac{17q+11}{39}=q+r$, такъ, что $r=\frac{17q+11}{39}$, отсюда будетъ $39r=17q+11$, и $q=\frac{39r-11}{17}=2r+\frac{5r-11}{17}=2r+s$, такъ что $s=\frac{5r-11}{17}$, или $17s=5r-11$; по сему будетъ $r=\frac{17s+11}{5}=3s+\frac{2s+11}{5}=3s+t$, такъ что $t=\frac{2s+11}{5}$, или $5t=2s+11$, слѣдовательно будетъ $s=\frac{5t-11}{2}=2t+\frac{t-11}{2}=2t+u$, такъ что $u=\frac{t-11}{2}$ и $t=2u+11$; когда теперь больше уже дробей не попадается, то можно взять u по изволенїю, и оттуда наизворотъ получаемъ мы слѣдующїя опредѣленїя :-

$t=2u+11$

$s=2t+u=5u+22$

$r=3s+t=17u+77$

$$q = 2r + s = 39u + 176$$

$$p = q + r = 56u + 253$$

и наконецъ $N = 39.56u + 9883$.

Но что бы самое меншее число вмѣсто N найти, то положи $u = -4$ будетъ $N = 1147$, положивъ $u = x - 4$ будетъ $N = 2184x - 8736 + 9883$, или $N = 2184x + 1147$. Сіи числа дѣлаютъ ариѳметическую прогрессію, которой первой членъ есть 1147, а разность $= 2184$, самыя же числа будутъ 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 и протч.

818.

Для упражненія присоединимъ еще нѣсколько примѣровъ.

Вопросъ. Въ одной компаніи были мущины и женщины; каждой мущина издержалъ 25, каждая женщина 16 коп. и нашлось послѣ, что женщины вмѣстѣ одною копѣйкою больше заплатили, нежели мущины, спрашивается сколько было мущинъ и женщинъ?

поло-

Положимъ число женщинъ было $=p$, а мущинъ $=q$, то женщины издержали $16p$, а мущины $25q$: чего ради должно быть $16p=25q+1$, отсюду найдется $p=\frac{25q+1}{16}$ $=q\frac{+9q+1}{16}=q+r$, такъ что $r=\frac{9q+1}{16}$, слѣдовательно $q=\frac{16r-1}{9}=r+\frac{7r-1}{9}$ $=r+s$, такъ что $s=\frac{7r-1}{9}$, или $9s=7r$ -1; откуда $r=\frac{9s+1}{7}=s+\frac{2s+1}{7}=s$ $+t$, такъ что $t=\frac{2s+1}{7}$ или $7t=2s$ $+1$, слѣдовательно $s=\frac{7t-1}{2}=3t+\frac{t-1}{2}$ $=3t+u$, такъ что $u=\frac{t-1}{2}$, или $2u=t$ -1, по чему $t=2u+1$, отсюда наизворотъ получаемъ мы

$t=2u+1$

$s=3t+u=7u+3$

$r = s + t = 9u + 4$

$q = r + s = 16u + 7$

$p = q + r = 25u + 11$ по сему было женщинъ $= 25u + 11$, а мущинъ $= 16u + 7$, гдѣ вмѣсто u, всякое цѣлое число взять можно; меншія числа съ слѣдующими будутъ такія:

число женщинъ	= 11,	36,	61,	86,	111	и пр.
— — мущинъ	7	23,	39,	55	71	и пр.

по первому рѣшенію въ самыхъ меншихъ числахъ женщины издержали 176 коп., а мущины 175 коп., слѣдовательно женщины одною копѣйкою больше истратили, нежели мущины.

819.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадей и быковъ, за каждую лошадь платилъ 31 рейхсталеръ, а за каждаго быка 20 р. талеровъ, и нашлось, что всѣ быки вмѣстѣ 7мью р. талерами стоили больше, нежели лошади. Спрашивается сколько было быковъ и лошадей?

Пусть

Пусть будетъ число быковъ $=p$, а лошадей $=q$, то должно $20p=31q+7$, откуда $p=\frac{31q+7}{20}=q+\frac{11q+7}{20}=q+r$, по сему $20r=11q+7$, и $q=\frac{20r-7}{11}=r+\frac{9r-7}{11}=r+s$, по сему $11s=9r-7$ и $r=\frac{11s+7}{9}=s+\frac{2s+7}{9}=s+t$, по сему $9t=2s+7$ и $s=\frac{9t-7}{2}=4t+\frac{t-7}{2}=4t+u$, по сему $2u=t-7$

и $t=2u+7$

$s=4t+u=9u+28$

$r=s+t=11u+35$

$q=r+s=20u+63$ число лошадей,

$p=q+r=31u+98$ число быковъ.

Отсюда

Отсюда найдутся меншїя положительныя числа, вмѣсто *p* и *q*, когда положится $u = -3$, большїя же числа увеличиваются въ ариѳметической прогрессїи, какъ слѣдуетъ:

число быковъ 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191
222, 253 и прочч.

число лошадей 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123
143, 163, и прочч.

820.

Когда мы въ семъ примѣрѣ разсмотримъ, какимъ образомъ буквы *p* и *q* изъ слѣдующихъ опредѣляются, то легко усмотрѣть можно, что сїе отъ содержанїя чиселъ 31 и 20 зависитъ, а особливо на томъ содержанїи, по котороому обыкновенно ищутъ самаго большаго общаго сихъ обѣихъ чиселъ дѣлителя, какъ изъ слѣдующаго явствуютъ:

20	31	1
	20	
11	20	1
	11	
9	11	1
	9	
2	9	4
	8	
1	2	2
	2	

Здѣсь видно, что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ опредѣленіяхъ буквъ, p, q, r, s и протч. выходятъ: и съ первою буквою на правой рукѣ связываются, а послѣдняя остается завсегда одинака; въ послѣднемъ же уравненіи выходитъ прежде всѣхъ число 7 и притомъ съ знакомъ + потому, что послѣднее опредѣленіе есть пятое. Естьли же бы число оныхъ было четное, тогда бы −7, поставить надлежало. Сіе будетъ яснѣе изъ слѣдующей таблички, гдѣ напередъ

передъ раздробленіе чиселъ 31 и 20, а потомъ опредѣленія буквъ p, q r и пр. представлены.

$31 = 1.\ 20 + 11$	$p = 1q + r$
$20 = 1.\ 11 + 9$	$q = 1.r + s$
$11 = 1.\ 9 + 2$	$r = 1.s + t$
$9 = 4.\ 2 + 1$	$s = 4t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2u + \ldots$

821.

По сему способу представленъ быть можетъ прежней примѣръ въ 14 статьѣ, какъ слѣдуетъ:

$56 = 1.\ 39 + 17$	$p = 1.q + r$
$39 = 2.\ 17 + 5$	$q = 2.r + s$
$17 = 3.\ 5 + 2$	$r = 3.s + t$
$5 = 2.\ 2 + 1$	$s = 2.t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2u + 11$

822.

Симъ образомъ въ состояніи мы рѣшить всѣ такіе примѣры вообще.

Пусть

Пусть будетъ дано сїе уравненїе $bp = aq + n$, гдѢ a, b и n извѢстны; здѢсь тоже дѢйствїе производить надлежитъ, какъ будто бы найти должно было самаго большаго общаго дѢлителя чиселъ a и b, изъ коихъ p и q, чрезъ слѢдующїя буквы опредѢлены будутъ, какъ слѢдуетъ:

пусть будетъ	$a = Ab + c$	$p = Aq + r$
	$b = Bc + d$	$q = Br + s$
	$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
	$d = De + f$	$s = Dt + u$
	$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
	$f = Fg + o$	$u = Fv \pm n$

ЗдѢсь въ послѢднемъ опредѢленїи берется $+n$, когда число опредѢленїй нечетное; напротивъ того $-n$, ежели оное будетъ четное. Такимъ образомъ можно теперь всѢ такїе вопросы рѢшить весьма скоро, изъ коихъ мы предложимъ нѢкоторые для примѢру.

823.

Вопросъ. Сыскать число, которое когда раздѢлится на 11, дастъ въ остаткѢ

кѣ 3, а раздѣленное на 19, даетъ остатокъ 5?

Пусть будетъ сїе число N, то вопервыхъ $N = 11p + 3$, а потомъ также $N = 19q + 5$: чего ради будетъ $11p + 3 = 19q + 5$, или $11p = 19q + 2$, откуда слѣдующая составится табличка:

$19 = 1.11 + 9$	$p = q + r$
$11 = 1.8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2.3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1.2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2.1 + 0$	$t = 2u + 2$

гдѣ u по изволенїю взять можно, а оттуда уже обратнымъ порядкомъ предъидущїя буквы опредѣляются, какъ слѣдуетъ:

$t = 2u + 2$

$s = t + u = 3u + 2$

$r = 2s + t = 8u + 6$

$q = r + s = 11u + 8$

$p = q + r = 19u + 14$

отсюда

отсюда получается искомое число $N = 209u + 157$ и такъ самое меншее число вмѣсто N есть 157.

824.

Вопросъ. Ищется число N, которое какъ и прежде раздѣленное на 11 даетъ въ остаткѣ 3, а раздѣленное на 19 даетъ остатокъ 5, и естьли оно же раздѣлится на 29 тобъ осталось 10?

По послѣднему положенію должно быть $N = 29p + 10$ и когда первые два договора уже вычислены, то изъ оныхъ быть надлежитъ, какъ уже выше найдено $N = 209u + 157$, вмѣсто чего поставимъ мы $N = 209q + 157$, чего ради будетъ $29p + 10 = 209q + 157$ или $29p = 209q + 147$, откуда слѣдующее дѣйствіе предпріять надлежитъ:

$209 = 7 \cdot 29 + 6$	слѣд:	$p = 7 \cdot q + r$
$29 = 4 \cdot 6 + 5$		$q = 4 \cdot r + s$
$6 = 1 \cdot 5 + 1$		$r = 1 \cdot s + t$
$5 = 5 \cdot 1 + 0$		$s = 5 \cdot t - 147.$

 От-

Отсюда возвращаемся назадъ слѣдующимъ образомъ.

$$s = 5t - 147$$
$$r = s + t = 6t - 147$$
$$q = 4r + s = 29t - 735$$
$$p = 7q + r = 209t - 5292$$

И такъ $N = 6061t - 153458$, самое меньшее число найдется, когда положится $t = -26$, тогда будетъ $N = 4128$.

825.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что ежели такое уравненіе такъ, $bp = aq + n$ разрѣшить должно будетъ, то оба числа a и b общаго дѣлителя кромѣ 1 цы имѣть не должны; ибо въ противномъ случаѣ былъ бы вопросъ невозможной, ежели бы число n тогожъ общаго дѣлителя не имѣло. Такъ когда наприм. $9p = 15q + 2$, гдѣ 9 и 15 общаго дѣлителя 3 имѣютъ, но на котораго 2 раздѣлиться не можетъ, того ради не льзя рѣшить сего вопроса, потому что $9p - 15q$ завсегда на 3 раздѣлится и слѣдовательно ни когда 2 быть

не

не можетъ. Естьли же бы въ семъ случаѣ $n=3$ или 6 и протч. , то былъ бы вопросъ совсѣмъ возможной и надлежало бы уравненіе раздѣлить на 3 , то бы вышло тогда $3p=5q+1$, что по прежнему правилу легко рѣшить можно. Почему явствуетъ , что оба числа a и b никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 цы имѣть не должны , и что предписанное правило ни въ какихъ другихъ случаяхъ имѣть мѣста не можетъ.

826.

А чтобы сіе яснѣе показать , то разсмотримъ натуральнымъ порядкомъ уравненіе $9p=15q+2$, гдѣ будетъ $p=\frac{15q+2}{9}=q+\frac{6q+2}{9}=q+r$, такъ что $9r=6q+2$, или $6q=9r-2$, почему $q=\frac{9r-2}{6}=r+\frac{3r-2}{6}=r+s$, такъ что $3r-2=6s$, или $3r=6s+2$, откуда $r=\frac{6s+2}{3}=2s+\frac{2}{3}$, что, какъ явствуетъ, никогда цѣлое число быть не можетъ ,

ибо s неотмѣнно цѣлое число быть должно; и такъ видно, что такїе вопросы по ихъ свойству не возможны.

ГЛАВА II.

О правилѣ такъ называемомъ слѣпомъ, гдѣ изъ двухъ уравненїй 3 или больше неизвѣстныхъ чиселъ опредѣляются.

827.

Въ предъидущей главѣ видѣли мы, какимъ образомъ изъ одного уравненїя два неизвѣстныя числа опредѣлять должно, такъ чтобы оныя были цѣлыя и положительныя Но ежели предложены будутъ два уравненїя, и вопросъ долженъ быть неопредѣленной, то надлежитъ быть больше, нежели двумъ неизвѣстнымъ числамъ; такїе вопросы случаются въ простыхъ ариѳметическихъ книгахъ и рѣшатся по *правилу слѣпому*, котораго основанїе показать мы здѣсь намѣрены.

828.

828.

Начнемъ съ самаго примѣра.

Вопросъ. 30 человѣкъ мущинъ, женщинъ и робятъ издержали въ трактирѣ 50 рейхсталеровъ, каждой мущина заплатилъ 3 р. талера, каждая женщина 2 р. талера, каждой ребенокъ 1 р. талеръ. Спрашивается сколько было мущинъ, женщинъ и робятъ?

Пусть будетъ число мущинъ $=p$, женщинъ $=q$, а робятъ $=r$, то получатся слѣдующія два уравненія: I) $p+q+r=30$; II) $3p+2q+r=50$, изъ коихъ 3 буквы p, q и r въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ опредѣлить должно. Изъ перваго уравненія будетъ $r=30-p-q$; чего ради $p+q$ должны быть меньше 30ти. Сію величину поставивъ вмѣсто r въ другомъ уравненіи выдетъ $2p+q+30=50$, слѣдовательно $2p+q=20$; и такъ $q=20-2p$, а $p+q=20-p$, что само по себѣ меньше 30ти, теперь вмѣсто p всѣ числа брать можно, кои не больше 10ти, по чему слѣдующія выходятъ рѣшенія.

число мущинъ $p =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9, 10,
— женщинъ $q =$ 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0,
— и ребятъ $r =$ 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. 20,

отбросивъ первыя и послѣднія, останутся еще 9 истинныхъ рѣшеній.

829.

Другой вопросъ. Нѣкто купилъ 100 разнаго рода скотины, свиней, козъ и барановъ за 100 рейхсталеровъ, за одну свинью давалъ $3\frac{1}{2}$ р. талеровъ, за козу $1\frac{1}{3}$ р. талер., за барана $\frac{1}{2}$ р тал. спрашивается, сколько каждаго роду было?

Пусть будетъ число свиней $= p$, козъ $= q$, барановъ $= r$, то выдутъ слѣдующія два уравненія.
I с. $p + q + r = 100$; II) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$. Сіе послѣднее уравненіе для избѣжанія дробей помножь на 6, выдетъ $21p + 8q + 3r = 600$, изъ перваго уравненія будетъ $r = 100 - p - q$, котораго величину поставивъ во второмъ уравненіи, получится $18p + 5q = 300$, или $5q = 300 - 18p$ и $q = 60 - \frac{18}{5}p$, слѣдовательно $18p$ дол-

должны на 5 раздѣлиться, или 5 какѣ множителя вѣ себѣ заключать должны, и такѣ положи $p = 5s$ будетѣ $q = 60 + 18s$ и $r = 13s + 40$, гдѣ вмѣсто s произвольное цѣлое число взять можно, но такѣ чтобѣ q не было отрицательнымѣ; чего ради s не больше 3хѣ быть долженѣ, и слѣдовательно когда 0 также изключается, то слѣдующія только 3 рѣшенія мѣсто имѣютѣ, а имянно:

когда	$s =$	1,	2,	3
будетѣ	$p =$	5,	13,	15
	$q =$	42,	24,	16
	$r =$	53,	66,	79.

830.

Когда кто такіе примѣры самѣ предлагать пожелаетѣ, то прежде всего на то смотрѣть надлежитѣ, чтобѣ были оныя возможны, а что бы сіе узнать, то надлежитѣ примѣчать слѣдующее:

Пусть будутѣ оба уравненія, какіе мы по сіе мѣсто имѣли, такѣ пред-

спавлены Iе) $x+y+z=a$, II) $fx+gy+hz=b$, гдѢ f, g, h, такЪ какЪ a и b извѢстны; пусть теперь между числами f, g и h первое будетЪ наибольшее, а h наименьшее; когдажь $x+y+z=a$, то $fx+fy+fz=fa$, а $fx+fy+fz$ больше нежели $fx+gy+hz$, по чему fa должно быть больше нежели b, или b меньше нежели fa; а $hx+hy+hz=ah$ и $hx+hy+hz$ заподлинно меньше нежели $fx+gy+hz$, то и ah должно быть меньше нежели b, или b больше нежели ah. СлѢдовательно когда число b, не меньше fa и притомЪ не больше ah, то вопросЪ завсегда не возможной.

Сей договорЪ обыкновенно также предлагается и слѢдующимЪ образомЪ: чтобЪ число b содержалось вЪ предѢлахЪ fa и ah, сверьхЪ сего чтобЪ оное не очень близко подходило кЪ обоимЪ предѢламЪ; ибо иначе остальные буквы опредѢлены быть не могутЪ.

ТакЪ

Такъ въ прежнемъ примѣрѣ, гдѣ $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, предѣлы были 350 и 50, естьли бы теперь захотѣли положить $b=51$ вмѣсто 100, то вышли бы уравненіи $x+y+z=100$ и $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$, здѣсь помноживъ на 6 будетъ $21x+8y+3z=306$, возми первое уравненіе 3жды, получится $3x+3y+3z=300$, которое изъ прежняго вычти, останется $18x+5y=6$, кое какъ заразъ видно, невозможно; потому что x и y цѣлыя числа быть долженствуютъ.

831.

Сіе правило нужно монетныхъ и золотыхъ дѣлъ мастерамъ, когда они хотятъ изъ трехъ или больше родовъ серебра, что нибудь здѣлать, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Вопросъ. Одинъ монетной мастеръ имѣетъ троякое серебро, первое 14 лотовое, другое 11 лотовое и третіе 9 лотовое, а должно ему здѣлать вещь

вѣсомъ въ 30 марокъ, которая должна быть 12 лотовая.

Спрашивается сколько марокъ каждаго серебра взять ему надлежитъ?

Положимъ что взялъ онъ изъ перваго серебра x марокъ, изъ другаго y, а изъ третьяго z марокъ, то должно быть $x+y+z=30$, что составляетъ первое уравненіе; потому каждая марка перваго сорта содержитъ 14 лотовъ хорощаго серебра, то x марокъ содержать будутъ $14x$ лотовъ серебра, подобнымъ образомъ y марокъ втораго роду содержатъ $11y$ лотовъ серебра и z марокъ, третьяго роду содержатъ $9z$ лотовъ серебра; почему весь кусокъ серебра содержать будетъ $14x+11y+9z$ лотовъ, а понеже оной вѣситъ 30 марокъ, изъ которыхъ каждая содержать должна 12 лотовъ серебра, то надлежитъ количеству серебра въ ономъ кускѣ быть 360 лотовъ; откуда сіе второе уравненіе выходитъ $14x+11y+9z=360$: изъ сего вычти первое уравненіе 9 разъ взятое,

т. е.

т. е. $9x+9y+9z=270$, останется $5x+2y=90$; откуда и x y опредѣлить должно, и притомъ въ цѣлыхъ числахъ, но $z=30-x-y$, а изъ другаго уравненія получится $2y=90-5x$ и $y=45-\frac{5x}{2}$, положивъ $x=2u$ найдется $y=45-5u$ и $z=3u-15$. Слѣдовательно u должно быть больше 4хъ, хотя и меньше 10ти. Отсюда выходятъ слѣдующія рѣшенія:

u	$=5,$	$6,$	$7,$	$8,$	$9.$
x	$=10,$	$12,$	$14,$	$16,$	$18.$
y	$=20,$	$15,$	$10,$	$5,$	$0.$
z	$=0,$	$3,$	$6,$	$9,$	$12.$

832.

Иногда случаются больше нежели 3 неизвѣстныя числа, гдѣ рѣшеніе такимъ же образомъ дѣлается, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

Вопросъ. Нѣкто купилъ сотню скотины за 100 рейхсталеровъ, каждаго быка за 10 р. тал.; каждую корову за 5 р. тал.; каждаго теленка за 2 р. талер.; каждую

овцу

овцу за $\frac{1}{2}$ р. талера. Спрашивается, сколько было быковъ, коровъ, телятъ и овецъ.

Пусть будетъ число быковъ $= p$, коровъ $= q$, телятъ $= r$ и овецъ $= s$, то первое уравненіе будетъ $p + q + r + s = 100$, и второе $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, которое для избѣжанія дробей помноженно на 2, даетъ $20p + 10q + 4r + s = 200$, изъ сей вычти первое уравненіе, выдетъ $19p + 9q + 3r = 100$, отсюда $3r = 100 - 19p - 9q$ и $r = 33\frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, или $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, по чему $1-p$, или $p-1$ должно дѣлиться на 3; и такъ возми $p - 1 = 3t$, то будетъ, какъ слѣдуетъ

$$p = 3t + 1$$
$$q = q$$
$$r = 27 - 19t - 3q$$
$$s = 72 + 2q + 16t$$

И такъ $19t + 3q$ должны быть меньше, нежели 27. Здѣсь можно теперь взять q и t по произволенію, съ симъ только договоромъ, чтобъ $19t + 3q$ не были боль-

больше 27ми и по сему слѣдующїе случаи разсмотрѣть мы имѣемъ.

I когда $t=0$	II когда $t=1$	t нельзя взять $=2$; ибо въ противномъ случаѣ вышло бы t отрицательное.
то будетъ $p=1$	будетъ $p=4$	
$q=q$	$q=q$	
$r=27-3q$	$r=8-3q$	
$s=72+2q$	$s=88+2q$	

Въ первомъ случаѣ q не должно быть больше 9, а во второмъ не больше 2хъ; и такъ изъ обоихъ случаевъ получаемъ мы слѣдующїя рѣшенїя.

Изъ перваго случая выходятъ сїи 10 рѣшенїй, какъ

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

а изъ другаго случая сїи 3 рѣшенїя

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92.

Слѣдовательно всѣхъ навсе 13 рѣшенїй; но когда 0 изключится, то будетъ только 10.

833.

Способъ рѣшенїя бываетъ всегда одинаковъ, хотя бы въ первомъ уравненїи буквы на данныя числа и помножены были, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Вопросъ. Найти 3 такїя числа, изъ которыхъ когда первое помножится на 3, другое на 5, а третїе на 7, тобъ сумма произведенїй была 560; когда же первое помножится на 9, другое на 25 и третїе на 49, тобъ сумма произведенїй была 2920?

Пусть будетъ первое число $= x$, другое $= y$, третїе $= z$, то выдутъ

сїи два уравненїя I) $3x + 5y + 7z = 560$; II) $9x + 25y + 49z = 2920$, изъ втораго вычти первое трижды взятое, а имянно $9x + 15y + 21z = 1680$ останется $10y + 28z = 1240$, или раздѣливъ на 2 будетъ $5y + 14z = 620$; откуда $y = 124 - \frac{14z}{5}$, слѣдовательно z долженъ дѣлиться на 5; и такъ положи $z = 5u$, будетъ $y = 124 - 14u$, которыя знаменованїя поставивъ въ первомъ уравненїи вмѣсто z и y дадутъ $3x - 35u + 620 = 560$, или $3x = 35u - 60$, и $x = \frac{35u}{3} - 20$, чего ради взявъ $u = 3t$ получится наконецъ такое рѣшенїе $x = 35t - 20$; $y = 124 - 42t$ и $z = 15t$, гдѣ вмѣсто t произвольныя цѣлыя числа брать можно; но такъ чтобы t было больше 0, но менше 3хъ, откуда получаются сїи два рѣшенїя:

Iе) когда $t = 1$, будетъ $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$

IIе) ежели $t = 2$, получится $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.

ГЛАВА

ГЛАВА III

О составныхъ неопредѣленныхъ уравненіяхъ, въ которыхъ первая только степень неизвѣстнаго числа находится.

834.

Теперь приступимъ мы къ такимъ уравненіямъ, гдѣ два неизвѣстныя числа ищутся, и каждое не одно, какъ прежде, но или между собою помножены, или до нѣкоторой вышшей степени возвышены попадаются, ежели между тѣмъ другаго числа только первая степень находится. Такія уравненія имѣютъ вообще слѣдующую формулу:

$a + bx + cy + dxx + exy + fx^2 + gxxy + hx^4 + kx^3y$ и прот. $= 0$ гдѣ y первой только степени попадается, и слѣдовательно легко опредѣленъ быть можетъ. Но опредѣленіе должно быть такое, чтобъ вмѣсто x и y вышли цѣлыя числа: такіе случаи станемъ мы теперь разсматривать и начнемъ съ самыхъ легкихъ.

835.

Найти два числа, которыхъ когда сумма придастся къ ихъ произведенію, выдетъ 79? Пусть будутъ два требуемыя числа x и y, то должно быть $xy + x + y = 79$, откуда получаемъ мы $xy + y = 79 - x$ и $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$; по чему явствуетъ, что $x + 1$ долженъ быть дѣлитель 80 ти: но понеже 80 имѣетъ многихъ дѣлителей, потому изъ каждаго найдется величина x, какъ изъ слѣдующаго видно:

дѣлители	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
будетъ $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
и $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Понеже здѣсь послѣднія рѣшенія съ первыми сходны, того ради всѣхъ рѣшеній будетъ только 5.

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

836.

Подобнымъ образомъ можно также разрѣшить сїе всеобщее уравненїе: $xy + ax + by = c$, откуда выдетъ $xy + by = c - ax$ и слѣдовательно $y = \frac{c-ax}{x+b}$, или $y = -a + \frac{ab+c}{x+b}$; чего ради $x + b$ должно быть дѣлителемъ даннаго числа $ab + c$: и такъ изъ каждаго дѣлителя онаго числа можно найти величину x. Положи $ab + c = fg$ такъ что $y = -a \frac{+fg}{x+b}$, и возми $x + b = f$ или $x = f - b$, будетъ $y = -a + g$, или $y = g - a$. По сему различнымъ образомъ число $ab + c$ въ двухъ множителяхъ изъявить можно, и получится оттуда не одно но два рѣшенїя, а имянно: первое $x = f - b$ и $y = g - a$; а другое когда $x + b = g$ положится и найдется $x = g - b$, а $y = f - a$.

Естьли бы предложено было сїе уравненїе $xy + 2x + 3y = 42$, то было бы $a = 2$, $b = 3$ и $c = 42$, слѣдовательно $y = -2 + \frac{48}{x+3}$; теперь число 48 различнымъ образомъ изъ двухъ множителей какъ f, g представлено быть можетъ и завсегда найдется $x = f - 3$ и $y = g - 2$, или

$x = g - 3$

$x = g - 3$, а $y = f - 2$, такїе множители суть слѣдующїе :

множители	I		II		III		IV		V	
	1.48		2. 24		3. 16		4. 12		6. 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
числа	-2	46	1	22	0	14	1	10	3	6
или	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

837.

Еще генералнѣе представить можно уравненїе такимъ образомъ ; $mxy = ax + by + c$, гдѣ a, b, c и m данныя числа, а вмѣсто x и y требуются цѣлыя числа.

По сему ищи y, и получится $y = \frac{ax+c}{mx-b}$; а чтобы здѣсь изъ числителя можно было изключить x , то помножь съ обѣихъ сторонъ на m, выдетъ $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Числитель сей дроби есть извѣстное число , коего знаменатель долженъ быть дѣлителемъ ; чего ради представь числителя въ двухъ множителяхъ какъ f, g, что различнымъ об-

разомъ учиниться можетъ, и смотри можно ли одного изъ нихъ сравнить съ $mx - b$, такъ чтобъ $mx - b = f$, а къ сему требуется, когда $x = \frac{f+b}{m}$, чтобъ $f + b$ могло на m раздѣлиться; чего ради здѣсь тѣ только множители изъ $mc + ab$ употребить можно, кои, когда придастся къ нимъ b, могутъ на m раздѣлиться, что изъяснить примѣромъ небезнужно.

Пусть будетъ $5xy = 2x + 3y + 18$, отсюда получится $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ и $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$; здѣсь числа 96 ти такихъ дѣлителей искать надлежитъ, что ежели къ нимъ придадутся 3, то сумма на 5 раздѣлится: и такъ возми всѣхъ множителей 96 ти, кои суть 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Откуда видно, что сіи только числа 2, 12, 32, употребить можно.

Пусть

Пусть теперь I) $5x-3=2$, будетъ $5y=50$
слѣдов. $x=1$, а $y=10$.

II) $5x-3=12$ – – – $5y=10$.
– – – $x=3$, $y=2$.

III) $5x-3=32$ – – – $5y=5$.
– – – $x=7$, $y=1$.

838.

Понеже здѣсь во всеобщемъ рѣшеніи $my-a=\frac{mc+ab}{mx-b}$, то слѣдующее примѣчать потребно, Ежели въ сей формулѣ $mc+ab$ содержащееся число имѣетъ дѣлителя, которой находится въ формулѣ $mx-b$, то частное тогда неотмѣнно должно имѣть сію формулу $my-a$, и тогда число $mc+ab$ чрезъ такое произведеніе $(mx-b)(my-a)$ представлено быть можетъ. Пусть будетъ на прим. $m=12$, $a=5$, $b=7$ и $c=15$, то получится $12y-5=\frac{215}{12x-7}$, а 215 ти дѣлители суть 1, 5, 43, 215, между которыми тѣ, кои найти должно, содержатся въ формулѣ

$12x-7$; или когда 7 къ онымъ придадутся, тобъ дѣлилась сумма на 12 Здѣсь 5 только сіе дѣлаетъ, и такъ $12x-7=5$, а $12y-5=43$: изъ первой формулы будетъ $x=1$, а изъ второй y найдется въ цѣлыхъ числахъ, а имянно $y=4$. Сіе обстоятельство въ разсужденіи свойства чиселъ есть великой важности, и для того примѣчать оное весьма нужно.

839.

Разсмотримъ еще такое уравненіе; $xy+xx=2x+3y+29$; отсюда найдется $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$, или $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$; и такъ $x-3$ долженъ быть дѣлитель числа 26, и тогда частное будетъ $y+x+1$; но дѣлители 26 ти суть 1, 2, 13, 26, то получаемъ мы сіи рѣшенія:

Iе) $x-3=1$, или $x=4$, будетъ $y+x+1$
$=y+5=26$, и $y=21$.

IIе) $x-3=2$, или $x=5$, будетъ $y+x+1$
$=y+6=13$ и $y=7$.

IIIе)

IIIe) $x-3=13$, или $x=16$, будетъ $y+17$
$= 2$, и $y=-15$,

которое отрицательное знаменованіе оставлено, и для того послѣдняго случая $x-3=26$ щитать не должно.

840.

О другихъ формулахъ сего рода, въ которыхъ y первой только степени, говорить здѣсь не нужно; ибо такіе случаи рѣдко попадаются, да и тогда по показанному здѣсь правилу, рѣшены быть могутъ. Но когда y до второй, или до вышшей степени возвышено будетъ, и величину онаго по даннымъ правиламъ опредѣлить за благо разсудится, то выдутъ въ такомъ случаѣ коренные знаки, позади коихъ вторая, или вышшая степень x находится; а надлежитъ величину x найти такъ, чтобъ неизвлекомость, или коренной знакъ уничтожился.

И въ семъ то состоитъ самое искуство неопредѣленной аналитики, та-

кія не извлекомыя формулы дѣлать извлекомыми; что мы въ слѣдующей главѣ покажемъ.

ГЛАВА IV.

О способѣ неизвлекомую формулу $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ здѣлать извлекомою.

841.

Здѣсь спрашивается, какую величину вмѣсто x взять надлежитъ, чтобъ формула $a+bx+cxx$ дѣйствительной была квадратъ, и такимъ бы образомъ можно было изъявить ея корень въ раціональныхъ, а b и c означатъ данныя числа, и изъ свойства оныхъ особливо зависитъ опредѣленіе неизвѣстнаго числа x.

При семъ прежде примѣчать должно, что во многихъ случаяхъ рѣшенія оныхъ бываютъ не возможны. Но ежели рѣшеніе будетъ возможное, то должно по крайней мѣрѣ въ опредѣленіи буквы x, довольство-

довольствоваться сперва одной только раціональною величиною и не требовать, чтобѣ были они еще и цѣлыя числа; что совсемѣ особливаго требуетѣ разысканія.

842.

Мы полагаемѣ здѣсь, что формула до второй только степени возвышена; ибо вышшіе степени особливаго требуютѣ способу, о которомѣ послѣ говорить должно.

Но естьли бы здѣсь и второй степени не случилось и было бы $c=0$, то бы вопросѣ никакой не имѣлѣ трудности; ибо, когда сія формула дана будетѣ $\sqrt{(a+bx)}$ и надлежитѣ опредѣлить x, такѣ чтобѣ $a+bx$ былѣ квадратѣ, то должно только положить $a+bx=yy$; откуда тотчасѣ выдетѣ $x=\frac{yy-a}{b}$, и теперь вмѣсто y можно брать всѣ произволящія числа, и изѣ каждаго такое знаменованіе вмѣсто x найдется, что $a+bx$ будетѣ квадратѣ, и слѣдовательно $\sqrt{(a+bx)}$ раціональное число.

843.

Начнемъ съ сей формулы $\sqrt{(1+xx)}$, гдѣ такія знаменованія вмѣсто x найти должно, что ежели къ ихъ квадрату xx придастся еще 1, тобъ сумма была паки квадратъ, что, какъ видно, въ цѣлыхъ числахъ быть не можетъ; ибо нѣтъ ни одного квадратнаго числа, которое бы было 1 цею больше предъидущаго; и такъ неотмѣнно довольствоваться должно ломаными числами вмѣсто x.

844.

Понеже $1+xx$ квадратное число быть должно, и мы бы захотѣли положить $1+xx=yy$, то вышло бы $xx=yy-1$, и $x=\sqrt{(yy-1)}$; и такъ чтобъ найти x, должно вмѣсто x такія искать числа, чтобъ ихъ квадраты уменшенные 1 цею были паки квадраты, которой вопросъ столь же труденъ какъ и прежней; и слѣдовательно симъ бы мы ничего не выиграли.

А что-

А что дѣйствительно есть такія дроби, кои будучи вмѣсто x взяты, дѣлаютъ $1+xx$ квадратомъ, то изъ слѣдующихъ случаевъ видѣть можно.

I) когда $x=\frac{3}{4}$, будетъ $1+xx=\frac{25}{16}$, слѣдовательно $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II) равнымъ образомъ сїе учинится, когда $x=\frac{4}{3}$, гдѣ найдется $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$.

III) потомъ ежели положится $x=\frac{5}{12}$, то получится $1+xx=\frac{169}{144}$, изъ чего квадратной корень есть $\frac{13}{12}$.

Какимъ образомъ, должно находить больше такихъ чиселъ, о семъ надлежитъ здѣсь показать.

845.

Сїе учиниться можетъ двоякимъ образомъ; по первому способу положи $\sqrt{(1+xx)}=x+p$, будетъ $1+xx=xx+2px+pp$, гдѣ квадратъ xx уничтожается; и слѣдовательно x безъ коренного знака опредѣленъ быть можетъ;

ибо

ибо въ найденномъ уравненіи вычти съ обѣихъ сторонъ xx, останется, $2px + pp = 1$, откуда найдется $x = \frac{1 - pp}{2p}$, гдѣ вмѣсто p, каждое цѣлое число и дроби брать можно.

И такъ положивъ $p = \frac{m}{n}$ будетъ $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{2\frac{m}{n}}$; сію дробь помноживъ вверьху, и внизу на nn получится $x = \frac{nn - mm}{2mn}$

846.

По сему, чтобы $1 + xx$ была квадратъ, можно вмѣсто m и n по соизволенію брать всѣ возможныя числа; и слѣдовательно оттуда безконечное множество знаменованій вмѣсто x найдется. Положи вообще $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, будетъ $x^2 + 1 = 1 + \frac{n^4 - 2nnmm + m^4}{4mmnn}$, или $x^2 + 1 = \frac{n^4 + 2nnmm + m^4}{4mmnn}$, которая дробь есть дѣй-

дѣйствительной квадратъ, и найдется оттуда $\sqrt{(1+xx)} = \frac{nn+mm}{2mn}$. Изъ сего слѣдующія малыя числа вмѣсто x изъявить можно;

естьли	$n = 2$	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5.
и	$m = 1$	1,	2.	1,	3,	1,	2,	3,	4.
будетъ	$x = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{15}{8}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$.

847.

Отсюда слѣдуетъ вообще, что $1 + \frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$; помноживъ сіе уравненіе на $(2mn)^2$, будетъ $(2mn)^2 + (nn-mm)^2 = (nn+mm)^2$; по сему имѣемъ мы вообще два квадрата, коихъ сумма паки квадратъ. Симъ разрѣшается теперь сей вопросъ:

найти два квадратныя числа, коихъ сумма также квадратъ?

Для $pp+qq=rr$, положи только $p=2mn$ и $q=nn-mm$, будетъ $r=nn+mm$, потомъ $(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, отсюда можемъ мы также рѣшить и сей вопросъ.

Найти

Найти два квадратныя числа, коихъ бы разность была также квадратъ?

Положимъ $pp - qq = rr$, то должно только взять $p = nn + mm$, а $q = 2mn$, и будетъ $r = nn - mm$, или можно также положить $p = nn + mm$, а $q = nn - mm$ и тогда будетъ $r = 2mn$.

848.

Мы обѣщали формулу $1 + xx$ двоякимъ образомъ здѣлать квадратомъ; другой способъ есть слѣдующей.

Положи $\sqrt{(1 + xx)} = 1 + \frac{mx}{n}$, откуда получится $1 + xx = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, вычти съ обѣихъ сторонъ 1, останется $xx = \frac{2mx}{n} + \frac{mm}{nn} xx$, которое уравненіе на x раздѣлиться можетъ, и выдетъ $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn}$, или умноживъ на nn будетъ $nnx = 2mn + mmx$, откуда найдет-

ся $x = \frac{2mn}{nn - mm}$, поставивъ сїю величину вмѣсто x будетъ $1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4}$, или $= \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4}$, которая дробь есть квадратъ изъ $\frac{nn + mm}{nn - mm}$; но когда теперь получается сїе уравненїе $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(nn - mm)^2}$, то слѣдуетъ отсюда, какъ и прежде, $(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$ два квадрата, коихъ сумма есть квадратъ.

849.

Сей случай, который мы разсмотрѣли обстоятельно, даетъ намъ два способа, чтобъ всеобщую формулу $a + bx + cxx$ здѣлать квадратомъ. Первой бываетъ въ такихъ случаяхъ, гдѣ c квадратъ, а второй гдѣ a квадратъ, которые оба случая мы здѣсь пройдемъ. I. пусть будетъ сперва c квадратное число,

или пусть будетъ данная формула $a+bx+ffxx$, которую квадратомъ дѣлать надлежитъ. На сей конецъ положи $\sqrt{(a+bx+ffxx)}=fx+\frac{m}{n}$, будетъ $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2fmx}{n}+\frac{mm}{nn}$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ xx уничтожается, такъ что $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, которое уравненіе помноживъ на nn даетъ $nna+nnbx=2mnfx+mm$, откуда найдется $x=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$. Сіе знаменованіе поставивъ вмѣсто x будетъ $\sqrt{(a+bx+ffxx)}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf}+\frac{m}{n}$, или $=\frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

850.

Но понеже вмѣсто x найдена дробь, то положи $x=\frac{p}{q}$ такъ чтобъ $p=mm-nna$, а $q=nnb-2mnf$, и формула $a+\frac{bp}{q}+\frac{ffpp}{qq}$ тогда будетъ квадратъ, слѣдовательно будетъ оная также квадратъ

ратъ ежели на квадратъ qq помножится; почему и сія формула $aqq+bpq+ffpp$ будетъ также квадратъ, ежели положится $p=mm-nna$ и $q=nnb-2mnf$, откуда безконечное множество рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ найти можно, потому что буквы m и n по изволенію брать можно.

851.

II. Второй случай бываетъ, когда первая буква a квадратъ, и по сему пусть будетъ дана сія формула $ff+bx+cxx$, которую квадратомъ сдѣлать надлежитъ; на сей конецъ положи $\sqrt{(ff+bx+cxx)}=f+\frac{mx}{n}$, будетъ $ff+bx+cxx=ff+\frac{2mfx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, гдѣ ff уничтожается, а остальные члены на x раздѣлиться могутъ, такъ что $b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{mmx}{nn}$ или $nnb+nncx=2mnf+mmx$ или $nncx-mmx=2mnf-nnb$, слѣдовательно $x=\frac{2mnf-nnb}{nnc-mm}$. Поставь сію величину

вмѣсто x, будетъ $\sqrt{(ff+bx+cxx)} = f + \frac{2mmf-mnb}{nnc-mm} = \frac{nncf-mmf-mnb}{nnc-mm}$. Положи здѣсь $x = \frac{p}{q}$, то можно квадратомъ здѣлать слѣдующую формулу $ffqq+bpq+cpp$, что учинится, когда положится $p = 2mnf-nnb$, а $q = nnc-mm$.

852.

Здѣсь случай особливо достопамятенъ, когда $a = 0$, или когда формулу $bx+cxx$ квадратомъ здѣлать должно; то надлежитъ только поставить $\sqrt{(bx+cxx)} = \frac{mx}{n}$, будетъ $bx+cxx = \frac{mmxx}{nn}$, гдѣ раздѣливъ на x и помноживъ на nn, выдетъ $bnn+cnnx = mmx$, слѣдовательно $x = \frac{nnb}{mm-cnn}$. Найти наприм. всѣ треугольныя числа, которыя бы были вдругъ и квадратныя, то должно $\frac{xx+x}{2}$, и слѣдовательно $2xx+2x$ быть квадратъ, и положимъ оной теперь $\frac{mmxx}{nn}$, то

$2nnx$

$2nnx + 2nn = mmx$, и $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$, гдѣ вмѣсто m и n всѣ возможныя числа брать можно. И выходить будетъ по большей части вмѣсто x дробь; а иногда и цѣлыя числа. Такъ, когда положится $m = 3$, а $n = 2$, то получится $x = 8$, коего треугольное число есть 36, которое также есть и квадратъ; можно также взять $m = 7$ и $n = 5$, будетъ $x = -50$, коего треугольное число есть 1225, которое вдругъ и 49ти треугольное и такожде квадратное.

Сїе получится также, ежели возмется $n = 7$ и $m = 10$; ибо тогда будетъ $x = 49$.

Равнымъ образомъ можно положить $m = 17$, а $n = 12$, выдетъ $x = 288$, коего треугольное число есть $\frac{x(x+1)}{2}$, $= \frac{288 . 289}{2} = 144 . 289$, которое есть квадратное число, а корень онаго $= 12 . 17 = 204$.

853.

Въ семъ послѣднемъ случаѣ разсмотрѣть надлежитъ, чтобъ по сему основанїю формулу $bx+cxx$ здѣлать квадратомъ. Ибо оная имѣетъ множителя x; что ведетъ насъ къ новымъ случаямъ, въ которыхъ также и формула $a+bx+cxx$ квадратомъ быть можетъ, когда ни a ниже c не квадраты.

Оные случаи имѣютъ мѣсто, когда $a+bx+cxx$ на двухъ множителей разрѣшиться можетъ; что учинится ежели $bb-4ac$ есть квадратъ. Для показанїя сего надлежитъ примѣчать, что множители отъ корней уравненїя зависятъ, чего ради положи $a+bx+cxx=0$, будетъ $cxx=-bx-a$ и $xx=-\frac{bx}{c}-\frac{a}{c}$, откуда найдется $x=\frac{-b}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{bb}{4cc}-\frac{a}{c}\right)}$ или $x=\frac{-b\pm\sqrt{(bb-4ac)}}{2c}$; по чему явствуетъ, что ежели $bb-4ac$ есть квадратъ, то можно опредѣлить корень рацїональной, и по сему пусть будетъ

bb

$bb-4ac=dd$, то выдутъ корни $x=\frac{-b+d}{2c}$, или $x=\frac{-b-d}{2c}$; и такъ дѣлители формулы $a+bx+cxx$, будетъ $x+\frac{b-d}{2c}$, и $x+\frac{b+d}{2c}$, кои помноживъ между собою, получишь ту же формулу раздѣленную только на c. А имянно найдется $xx+\frac{bx}{c}$ $+\frac{bb}{4cc}-\frac{dd}{4cc}$; но $dd=bb-4ac$, то получится $xx+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}-\frac{bb}{4cc}+\frac{4ac}{4cc}=xx$ $+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}$: помноживъ на c выдетъ cxx $+bx+a$, слѣдовательно должно только одного множителя на c помножить, то формула наша равна будетъ сему произведенію $\left(cx+\frac{b}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{b}{2c}+\frac{d}{2c}\right)$, и видно, что сіе рѣшеніе завсегда мѣсто

имѣетъ, какъ скоро $bb - 4ac$ будетъ квадратъ.

854.

Отсюда раждается третей случай, въ которомъ формулу нашу $a + bx + cxx$ квадратомъ здѣлать можно, и которой мы къ двумъ прежнимъ присовокупимъ.

III. Сей случай тогда только бываетъ, когда формулу нашу чрезъ такое произведеніе представить можно, какъ $(f+gx)(h+kx)$, а дабы сіе сдѣлать квадратомъ, то положи корни $\sqrt{(f+gx)(h+kx)} = \frac{m(f+gx)}{n}$, получится $(f+gx)(h+kx) = \frac{(mm)(f+gx)^2}{nn}$, которое уравненіе раздѣливъ на $f+gx$, получишь $h+kx = \frac{mm(f+gx)}{nn}$ т. е. $hnn + knnx = fmm + gmmx$; откуда найдется $x = \frac{fmm - hnn}{knn - gmm}$.

855.

Для изъясненія сего пусть предложенъ будетъ сей вопросъ.

Найти

Найти числа x такъ, что ежели изъ удвоеннаго ихъ квадрата вычтешь 2, чтобы остатокъ былъ квадратъ?

Понеже $2xx-2$ должно быть квадратное число, то надлежитъ здѣсь смотрѣть, чтобъ сiю формулу чрезъ слѣдующихъ множителей представить $2(x+1)(x-1)$. Полагая корень $= \frac{m.(x+1)}{n}$ будетъ $2(x+1)(x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; раздѣливъ на $x+1$ и помноживъ на nn получится $2nnx-2nn = mmx+mm$, а оттуда $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Возми здѣсь $m=1$ и $n=1$ будетъ $x=3$, $2xx-2=16=4^2$; положи $m=3$ и $n=2$ выдетъ; $x=-17$; но понеже здѣсь квадратъ числа x входитъ, въ разсужденiе, то все равно, будетъ ли $x=-17$, или $x=+17$: ибо изъ обоихъ получится $2xx-2=576=24^2$.

856.

856.

Пусть дана будетъ сія формула $6 + 13x + 6xx$, которую квадратомъ здѣлать надлежитъ. Здѣсь $a = 6$, $b = 13$ и $c = 6$, гдѣ слѣдовательно ни a ни c не квадратъ; и такъ смотри не квадратъ ли $bb - 4ac$; но здѣсь выходитъ 25, то видно что сію формулу въ двухъ множителяхъ представить можно, кои суть $(2 + 3x)(3 + 2x)$. Пусть будетъ корень сего $\frac{m(2 + 3x)}{n}$, то $(2 + 3x)(3 + 2x) = \frac{mm(2 + 3x)^2}{nn}$, отсюда $3nn + 2nnx = 2mm + 3mmx$, и $x = \frac{2mm - 3nn}{2nn - 3mm} = \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}$.

А чтобы числитель былъ положительной, то $3nn$ должны быть больше нежели $2mm$, или $2mm$ меньше $3nn$, слѣдовательно $\frac{mm}{nn}$ меньше быть должно нежели $\frac{3}{2}$ чтобъ числитель былъ положительной; но чтобъ знаменатель также былъ прибыточный, то $3mm$ должны быть больше

нежели

нежели $2nn$ слѣдовательно $\frac{mm}{nn}$ должно быть больше $\frac{2}{3}$ хЪ: и такЪ чтобЪ вмѣсто x найти положительныя числа, то вмѣсто m и n такія числа брать надлежитЪ, чтобЪ $\frac{mm}{nn}$ менше было $\frac{3}{2}$ хЪ, а больше $\frac{2}{3}$ хЪ. Положи теперь $m=6$ и $n=5$, будетЪ $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$ меньше $\frac{3}{2}$ хЪ и очевидно больше $\frac{2}{3}$ хЪ, откуда найдется $x=\frac{3}{58}$,

857.

IV. Сей третей случай ведетЪ насЪ кЪ четвертому, которой тогда мѣсто имѣетЪ, когда формулу $a+bx+cxx$ можно раздробить на двѣ части такЪ, что первыя будетЪ квадратЪ, а другая на два множителя разрѣшится, такЪ что вмѣсто первой выдетЪ такая формула $pp+qr$, гдѣ буквы p, q и r такую формулу $f+gx$ означаютЪ, и тогда надлежитЪ только положить $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, получится

ся $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn}$, гдѣ pp уничтожается, а остальные члены на q дѣлятся, такъ что $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$, или $nnr = 2mnp + mmq$, откуда легко найдется x. и сей то есть четвертой случай, въ которомъ формулу нашу квадратомъ здѣлать можно и которой мы примѣромъ изъяснить намѣрены.

858.

Вопросъ. Найти такія числа x, чтобъ ихъ удвоенной квадратъ единицею былъ больше другаго квадрата, или когда изъ онаго отнимешь 1 цу, тобъ въ остаткѣ былъ квадратъ? какъ то съ числомъ 5 дѣлается, коего квадратъ 25 дважды взятой есть 50: изъ него отнявъ 1 цу останется квадратъ 49.

По сему $2xx - 1$ должно быть квадратъ, гдѣ по нашей формулѣ $a = -1$, $b = 0$

$b=0$ и $c=2$; здѣсь ни c ни a не квадратъ и не можетъ такожде на два множителя разрѣшиться, потому что $bb-4ac=8$ не квадратъ: и такъ ни одинъ изъ первыхъ трехъ случаевъ мѣста не имѣютъ.

А по четвертому можно сію формулу представить такъ: $xx+xx-1=xx+(x+1)(x-1)$, откуда корень положивъ $=x+\frac{m(x+1)}{n}$ будетъ $xx+(x+1)(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ xx уничтожается, а остальные члены на $x+1$ раздѣлиться могутъ; и выдетъ $nnx-nn=2mnx+mmx+mm$; по чему $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$ и понеже въ нашей формулѣ $2xx-1$ попадается только квадратъ xx, то все равно, выдетъ ли x положительной или отрицательной; можно также и $-m$ поставить вмѣсто $+m$, чтобъ получить $x=\frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Возми здѣсь $m=1$ и $n=1$, найдется $x=1$ и $2xx-1=1$; положи

еще

еще $m = 1$ и $n = 2$, будетъ $x = \frac{5}{7}$ и $2xx - 1 = \frac{1}{49}$; а когда возмется $m = 1$ и $n = -2$ выдетъ $x = -5$, или $x = +5$, $2xx - 1 = 49$.

859.

Вопросъ. Найти такія числа, къ удвоенному коихъ квадрату когда придастся 2 чтобъ вышелъ квадратъ? Такое число есть 7, котораго квадратъ дважды взятой есть 98, придавъ 2 получится квадратъ 100.

И такъ сія формула $2xx + 2$ должна быть квадратъ, гдѣ $a = 2$, $b = 0$ и $c = 2$, слѣдовательно ни a ни c не квадратъ, также и $bb - 4ac$ не квадратъ и третіе правило имѣть здѣсь мѣста не можетъ.

А по четвертому правилу можно нашу формулу такъ представить.

Положи первую часть $= 4$ будетъ вторая $2xx - 2 = 2(x + 1)(x - 1)$ и по сему формула наша $4 + 2(x + 1)(x - 1)$, коей корень пусть будетъ $2 + \frac{m(x + 1)}{n}$; откуда

куда выходитъ сїе уравненїе $4+2(x+1)(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ 4 уничтожаются, а остальные члены на $x+1$ могутъ раздѣлиться, такъ что $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$, слѣдовательно $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Положи $m=1$ и $n=1$, будетъ $x=7$ и $2xx+2=100$; возми $m=0$ и $n=1$ выдетъ $x=1$ и $2xx+2=4$.

860.

Часто случается, что ни первое, ни второе, ни третїе правило имѣть мѣста не могутъ, а по четвертому формулы на двѣ такїя части, какїя требуются раздѣлить не можно. Такъ когдабы сїя формула случилась $7+15x+13xx$, то хотя такое раздробленїе и возможно; но не скоро оное видѣть можно. Ибо первая часть есть $(1-x)^2$, или $1-2x+xx$, по сему другая будетъ $6+17x+12xx$, которая для того множителей имѣетъ, что $17^2-4.6.12=1$, и слѣдовательно

вательно квадратъ ; два множителя изъ сего уравненія дѣйствительно суть $(2+3x)$ $(3+4x)$, такъ что сію формулу по четвертому правилу разрѣшить можно.

Но нельзя требовать , чтобъ кто сіе раздѣленіе угадать могъ ; чего ради намѣрены мы еще общей путь показать къ познанію , возможно ли такую формулу раздробить ; ибо безконечно много есть такихъ, которыхъ рѣшенія совсѣмъ не возможны , какъ наприм. въ сей формулѣ $3xx+2$, которую никогда квадратомъ здѣлать не можно. Но естьли найдется формула въ нѣкоторомъ случаѣ возможна , то легко можемъ найти всѣ ея рѣшенія ; что мы здѣсь еще изяснимъ.

861.

Вся польза , которая въ такихъ случаяхъ быть можетъ , состоитъ въ томъ , возможно ли какой случай найти, или отгадать , въ которыхъ бы формула $a+bx+cxx$ была квадратъ. Для того вмѣсто x ставя малыя числа по порядку,

и

и смотри не выдетѢ ли квадрата. Но что бы сей трудѢ облегчить, ежели вмѣсто x ломаныя числа иногда полагая требуемое получается, то можно заразѢ поставить вмѣсто x дробь; яко $\frac{t}{u}$, откуда раждается сія формула, $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, которая, ежели будетѢ квадратѢ, помножена на uu даетѢ также квадратѢ. И такѢ нужно только пробовать не можно ли отгадать t и u вѢ цѣлыхѢ числахѢ, чтобѢ сія формула $auu + btu + ctt$ была квадратѢ; ибо тогда положивѢ $x = \frac{t}{u}$, будетѢ также сія формула $a + bx + cxx$ заподлинно квадратѢ.

Но когда не смотря на весь сей трудѢ, никакого случая не найдется, то имѣемѢ мы большую причину думать, что такой формулы здѣлать квадратомѢ совсѣмѢ не возможно, какихѢ есть безконечное множество.

862.

Когда же случай отгаданъ, въ которомъ формула будетъ ккадратомъ, то легко найти всѣ возможные случаи, въ которыхъ она равнымъ образомъ будетъ квадратъ, и число оныхъ завсегда безконечно велико. Для показанія сего, разсмотримъ вопервыхъ формулу $2+7xx$, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=7$, оное, какъ явствуетъ, будетъ квадратъ, когда $x=1$, чего ради положи $x=1+y$, будетъ $xx=1+2y+yy$, и формула наша будетъ $9+14y+7yy$, въ которой первой членъ есть квадратъ, и такъ по второму правилу полагая корень ея $=3+\frac{my}{n}$ получаемъ сіе уравненіе $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, гдѣ 9 уничтожаются, а остальные члены на y могутъ раздѣлиться, и выдетъ $14nn+7nny=6mn+mmy$; слѣдовательно

у

$y = \frac{6mn - 14nn}{7nn - mm}$, и на конецЪ $x = \frac{6mn - 7nn - mm}{7nn - mm}$, гдѢ вмѢсто m и n всѢ произволящія числа брать можно.

Положи теперь $m = 1$ и $n = 1$ будетЪ $x = -\frac{1}{3}$, или также, затѢмЪ что xx входятЪ, $x = +\frac{1}{3}$, по сему будетЪ $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Возми еще $m = 3$ и $n = 1$, будетЪ $x = -1$; или $x = +1$, но положивЪ $m = -3$, $n = 1$, выдетЪ $x = 17$, а отсюда $2 + 7xx = 2025$ квадратЪ 45ти,

Пусть также будетЪ $m = 8$, а $n = 3$ получится $x = -17$ какЪ и прежде.

ПоложимЪ $m = 8$, а $n = -3$ выдетЪ $x = 217$, а отсюда $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

863.

РазсмотримЪ еще сію формулу, $5xx + 3x + 7$, которая будетЪ квадратЪ, когда $x = -1$; и такЪ положи $x = y - 1$, чего ради формула наша перемѢнится вЪ сію:

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - 7y + 9 \end{array}$$

квадратной ея корень положи $= 3 - \frac{my}{n}$, будетъ $5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$, откуда получимъ $5nny - 7nn = -6mn + mmy$ и $y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}$, слѣдовательно $x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}$. возми $m = 2$, $n = 1$, будетъ $x = -6$, и слѣдовательно $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Положивъ $m = -2$ и $n = 1$ найдется $x = 18$, и $5xx + 3x + 7 = 1681 = 412$.

864.

Разсмотримъ еще формулу $7xx + 15x + 13$ и положимъ $x = \frac{t}{u}$, такъ чтобъ формула $7tt + 15tu + 13uu$ была квадратъ; попробуй теперь вмѣсто t и u брать малыя числа, какъ слѣдуетъ.

Ежели

Ежели $t=1$ и $u=1$ будетъ наша формула $=35$
$t=2$ и $u=1$ - - - - - - - - - - $=71$
$t=2$ и $u=-1$ - - - - - - - - - - $=11$
$t=3$ и $u=1$ - - - - - - - - - - $=121$

Понеже 121 есть квадратъ, и слѣдовательно $x=3$ удовлетворяетъ; положи теперь $x=y+3$, формула наша будетъ $7yy+42y+63+15y+45+13$ или $7yy+57y+121$, коей корень положи $=11+\frac{my}{n}$, и получится $7yy+57y+121=121+\frac{22my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, или $7nny+57nn=22mn+mmy$, откуда $y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$, а $x=\frac{36nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$. Возми на прим. $m=3$ и $n=1$ будетъ $x=-\frac{3}{2}$ и формула наша $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2$.

Пусть еще будетъ $m=1$ и $n=1$, выдетъ $x=-\frac{17}{6}$; положи $m=-8$ и $n=1$ найдется $x=\frac{129}{2}$, и формула наша $7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=(\frac{347}{2})^2$.

865.

Иногда весь трудъ бываетъ напрасенъ, чтобъ отгадать случай, въ которомъ бы предложенная формула была квадратъ; какъ на прим. съ формулою дѣлается $3xx + 2$ или когда вмѣсто x возмется $\frac{t}{u}$; то съ сею $3tt + 2uu$, которая, какія бы вмѣсто t и u числа взяты ни были, никогда квадратомъ не будетъ. Такихъ формулъ, коихъ ни коимъ образомъ квадратомъ здѣлать не льзя, есть безконечное множество, и для того стоитъ труда дать нѣкоторые признаки, по которымъ бы сію въ нихъ невозможность познать можно было, дабы сей трудъ, чрезъ отгадываніе находить такіе случаи, въ которыхъ квадратъ выходитъ, не былъ тщетенъ, къ чему слѣдующая глава служитъ

ГЛАВА V.

О случаяхъ, въ которыхъ формула $a+bx+cxx$ никогда квадратомъ быть не можетъ.

866.

Когда общая наша формула состоитъ изъ трехъ членовъ, то надлежитъ примѣчать, что оную завсегда въ другую перемѣнить можно, въ которой средняго члена недостаетъ. Сїе дѣлается положивъ $x=\frac{y-b}{2c}$; по чему формула наша получаетъ сей видъ $a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}$, или $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$; но понеже сїя формула должна быть квадратъ, то положивъ его $=\frac{zz}{4}$ будетъ $4ac-bb+yy=czz$, слѣдовательно $yy=czz+bb-4ac$. И такъ ежели наша формула должна быть квадратъ, то будетъ такожде и $czz+bb-4ac$ квадратъ и обратно;

но; слѣдовательно когда вмѣсто $bb-4ac$ напишемъ t, то все дѣло въ томъ состоитъ, узнать можетъ ли такая формула быть квадратъ или нѣтъ; а поелику сія формула состоитъ только изъ двухъ членовъ, то безпорно легче разсуждать о ея возможножности или невозможности, что по свойству обоихъ чиселъ c и t учиниться можетъ.

867.

Когда $t=0$, то явствуетъ, что формула czz, тогда только будетъ квадратъ, когда число c квадратъ; ибо одинъ квадратъ раздѣленный на другой, въ частномъ даютъ квадратъ: такъ czz не можетъ быть квадратъ, ежели $\frac{czz}{zz}$, т. е. c не квадратъ; слѣдовательно когда c не квадратъ, то формула czz никоимъ образомъ квадратъ быть не можетъ. Но ежели c само по себѣ есть квадратное число, то и czz будетъ также квадратъ, какія бы числа вмѣсто z взяты ни были.

868.

868.

А что бы можно было разсуждать и о другихъ случаяхъ, то надлежитъ намъ въ помощь взять то, что прежде говорено было, о разныхъ родахъ чиселъ, въ разсужденіи каждаго дѣлителя.

Такъ въ разсужденіи дѣлителя 3 числа бываютъ трояекаго рода: первой содержитъ тѣ числа, кои на 3 дѣлятся на цѣло и въ формулѣ $3n$ представляются.

До втораго рода надлежатъ тѣ, кои раздѣленныя на 3, даютъ въ остаткѣ 1 и въ формулѣ $3n+1$ содержатся.

Третій родъ заключаетъ въ себѣ числа, кои раздѣленныя на 3, даютъ остатокъ 2 и содержатся въ формулѣ $3n+2$.

Ежели всѣ числа въ одной изъ сихъ трехъ формулъ содержатся, то разсмотримъ теперь ихъ квадраты.

Когда число содержится въ формулѣ $3n$, то будетъ его квадратъ $9nn$, кото-

рой не только на 3, но и на 9 дѣлится.

Буде же число во второй формулѣ $3n+1$ содержится, то квадратъ его есть $9nn+6n+1$, которой раздѣленъ будучи на 3 даетъ въ частномъ $3nn+2n$, а въ остаткѣ 1, слѣдовательно до втораго рода надлежитъ.

Ежели же наконецъ содержится число въ формулѣ $3n+2$, то квадратъ его есть $9nn+12n+4$, которой раздѣливъ на 3 выдетъ $3nn+4n+1$, а остатокъ 1, и слѣдовательно надлежитъ также до втораго рода $3n+1$. Откуда видно, что всѣ квадратныя числа въ рассуждении дѣлителей 3хъ, суть только двоякаго рода; ибо они, или на 3 могутъ раздѣлиться на цѣло, и тогда неотмѣнно раздѣлятся также и на 9, или ежели на 3 раздѣлиться не могутъ, то остатокъ бываетъ всегда 1, а 2 никогда; слѣдовательно ни одно число содержащееся въ формулѣ $3n+2$ квадратъ быть не можетъ.

869.

Изъ сего можемъ мы легко показать, что формула $3xx+2$ никогда квадратомъ не будетъ, хотя бы вмѣсто x цѣлое, или ломаное число взято было; ибо когда x цѣлое число и формула $3xx+2$ на 3 раздѣлится, то останется 2, слѣдовательно сїя формула квадратъ быть не можетъ; но ежели x дробь, то положи ево $=\frac{t}{u}$, о которой дроби можемъ мы принять, что она въ самой уже меньшей видъ приведена, и слѣдовательно $\frac{t}{u}$ никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 не имѣетъ.

Ежели бы $\frac{3tt}{uu}+2$ было квадратное число, то помноживъ на uu, т. е. $3tt+2uu$ надлежало бы быть квадрату; но сему равнымъ образомъ статься не льзя: ибо число u, или можетъ на 3 раздѣлиться, или нѣтъ; ежели можетъ, то не раздѣ-

лится t, по тому что иначе бы t и u общаго дѣлителя имѣли.

И такъ положивъ $u = 3f$ формула наша будетъ $3tt + 18ff$, которая раздѣленная на 3 даетъ $tt + 6ff$, которая паки на 3 раздѣлиться не можетъ, какъ для квадрата требуется; ибо хотя $6ff$ и могутъ раздѣлиться, но tt, раздѣленное на 3 даетъ въ остаткѣ 1.

Но когда u на 3 раздѣлиться не можетъ, то смотри, что будетъ въ остаткѣ. Понеже первой членъ на 3 можетъ раздѣлиться, то все дѣло состоитъ только въ остаткѣ втораго члена; но теперь uu раздѣленное на 3, даетъ въ остаткѣ 1, или оно есть число сего рода $3n + 1$, по чему $2uu$ будетъ число сего рода $6n + 2$, и слѣдовательно раздѣленное на 3, даетъ остатокъ 2; чего ради формула наша $3tt + 2uu$ раздѣленная на 3, даетъ въ остаткѣ 2, и заподлинно квадратъ быть не можетъ.

870.

870.

Такимъ же образомъ можно доказать, что и сія формула $3tt+5uu$, никогда квадратомъ не будетъ, да и ни одна изъ сихъ $3tt+8uu$, или $3tt+11uu$, или $3tt+14uu$ и протч., гдѣ числа 5, 8, 11, 14 и протч. раздѣленныя на 3, даютъ въ остаткѣ 2, ибо естьли бы u на 3 могло раздѣлиться; то t не можетъ. Положи $u=3s$, то бы формула раздѣлилась на 3, а на 9 нѣтъ. Естьли же u на 3 не дѣлимо, и слѣдовательно uu есть число сего рода $3n+1$, то хотя бы первой членъ $3tt$ на 3 и раздѣлился, но другой $5uu$ сей формулы $15n+5$, или $8uu$ изъ сей $24n+8$, или $11uu$ изъ $33n+u$ и протч. раздѣливъ на 3 получится въ остаткѣ 2, и слѣдовательно квадратъ быть не можетъ.

871

Сіе самое бываетъ съ общею формулою $3tt+(3n+2)uu$, которая никогда квадратъ не будутъ, да и тогда также, когда вмѣсто n положатся отрицатель-

ныя

ныя числа, такъ когда $n = -1$, то не возможно чтобъ сїя формула $3tt - uu$ была квадратомъ. Ибо ежели u на 3 дѣлится, то дѣло уже извѣстно, а когда бы u на 3 не дѣлилось, то было бы u число сего рода $3n + 1$ а формула наша $3tt - 3n - 1$, которую раздѣливъ на 3, получится въ остаткѣ -1, къ которой ежели приложится 3, выдетъ $+2$ Положи вообще $n = -m$, будетъ наша формула $3tt - (3m - 2)uu$, которая никогда квадратъ быть не можетъ.

872.

Къ сему привело насъ разсужденїе дѣлителя 3хъ, разсмотримъ теперь дѣлителя 4; ибо тогда всѣ числа содержатся въ сихъ формулахъ,

I $4n$; II $4n + 1$; III $4n + 2$; IV $4n + 3$.

Чиселъ перваго роду квадратъ есть $16nn$ и можетъ на 16 раздѣлиться, когда же число втораго рода $4n + 1$, то квадратъ его $16nn + 8n + 1$, которой раздѣливъ на 8, даетъ остатокъ 1 и надлежитъ

до формулы $8n+1$; а ежели будетъ число третьяго роду $4n+2$, то квадратъ онаго $16nn+16n+4$, которой раздѣливъ на 16 получится въ остаткѣ 4; и слѣдовательно въ формулѣ $16n+4$ содержится; буде же наконецъ число четвертаго роду $4n+3$, то квадратъ его $16nn+24n+9$ которой раздѣливъ на 8, въ остаткѣ будетъ 1.

873.

Изъ сего научаемся мы слѣдующему: вопервыхъ, что всѣ четныя квадратныя числа въ формулѣ нашей $16n$, или въ сей $16n+4$ содержатся; слѣдовательно всѣ остальныя четныя формулы, т. е. $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$, $16n+12$, $16n+14$, никогда квадратами быть не могутъ.

Потомъ изъ нечетныхъ квадратовъ усматриваемъ мы, что всѣ они въ формулѣ $8n+1$ содержатся, или раздѣливъ на 8 даютъ въ остаткѣ 1, по сему всѣ протчія нечетныя числа, которыя

въ

въ одной изъ сихъ формулъ $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ содержатся квадратами быть не могутъ.

874.

По сему основанію можемъ мы паки показать, что формула $3tt+2uu$ квадратомъ не будетъ; ибо или оба числа суть нечетныя или одно четное а другое нечетное, потому что оба вдругъ четныя быть не могутъ, въ противномъ случаѣ 2 былъ бы ихъ общей дѣлитель; ежели оба нечетныя и слѣдовательно какъ tt такъ, и uu содержатся въ формулѣ $8n+1$, то первой членъ $3tt$ раздѣливъ на 8 далъ бы въ остаткѣ 3, а второй членъ 2, оба вмѣстѣ 5, и слѣдовательно не квадратъ. Но ежели бы t было четное число, а u нечетное, то первой бы членъ $3tt$ раздѣлился на 4, а другой $2uu$ раздѣленной на 4 въ остаткѣ далъ бы 2, оба вмѣстѣ 2, и слѣдовательно не квадратъ. Естьли бы наконецъ u было четное, а имянно $=2s$, а t нечетъ слѣдовательно

$tt = 8n + 1$, то наша формула была бы $24n + 3 + 8ss$, которую раздѣливъ на 8, получится въ остаткѣ 3; и такъ квадратомъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ сїе доказательство можно употребить и въ сей формулѣ $3tt + (8n + 2)uu$, также и въ сей $(8m + 3)tt + 2uu$, да и въ сей такожде $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, гдѣ вмѣсто m и n всѣ цѣлыя числа какъ положительныя такъ и отрицательныя брать можно.

875.

Такимъ же образомъ приступимъ мы далѣе къ дѣлителю 5, въ рассужденiи котораго всѣ числа содержатся въ одной изъ сихъ формулъ:

I) $5n$; II) $5n + 1$; III) $5n + 2$; IV) $5n + 3$; V) $5n + 4$.

Естьли число будетъ перваго роду, то его квадратъ есть $25nn$, которой не только на 5, но и на 25 раздѣлиться можетъ.

Будеже число будетъ втораго роду, то квадратъ его $25nn + 10n + 1$, которой

рой раздѣливъ на 5, останется 1; и слѣдовательно въ формулѣ $5n+1$ содержится. Естьли же число третьяго рода, то квадратъ онаго есть $25nn+20n+4$, которой раздѣливъ на 5 даетъ въ остаткѣ 4.

Когда же число четвертаго рода, то квадратъ его есть $25nn+30n+9$, которой раздѣливъ на 5 останется 4.

А естьли наконецъ будетъ число пятаго рода, то квадратъ онаго $25nn+40n+16$, которой раздѣливъ на 5 даетъ остатокъ 1. И такъ ежели квадратное число на 5 раздѣлиться не можетъ, то остатокъ бываетъ всегда или 1, или 4, а никогда 2 или 3; по чему въ сей формулѣ $5n+2$ и $5n+3$ квадратъ содержаться не можетъ.

876

По сему основанію можемъ мы также доказать, что ни формула $5tt+2uu$, ниже сія $5tt+3uu$ квадратами не будутъ, ибо *u* на 5 или дѣлимо или нѣтъ: въ

первомъ

первомъ случаѣ сіи формулы могли бы раздѣлиться на 5, а на 25 нѣтъ. слѣдовательно квадратами быть не могутъ; но естьли u на 5 недѣлимо, то uu равно или $5n+1$, или $5n+4$; въ первомъ случаѣ будетъ формула $5tt+10n+2$, которую раздѣливъ на 5 останется 2, а другая будетъ $5tt+15n+3$ которую когда разразделишь на 5, въ остаткѣ будетъ 3, и слѣдовательно квадратъ быть не можетъ. Но ежели $uu=5n+3$, то первая формула выдетъ $5tt+10n+8$, которая когда разрѣшится на 5, въ остаткѣ будетъ 3, а другая $5tt+15n+12$, которую раздѣливъ на 5 останется 2; слѣдовательно и въ семъ случаѣ также квадратъ быть не можетъ.

Отсюда такожде явствуетъ, что ни сія формула $5tt+(5n+2)uu$, ниже сія $5tt+(5n+3)uu$ квадратами не будутъ: ибо такіе же выдутъ остатки какъ и прежде; да можно также и въ первомъ членѣ поставить $5mtt$, гдѣ только m на 5 недѣлимо.

877.

Всѣ четные квадраты въ формулѣ $4n$, а всѣ нечетные въ формулѣ $4n+1$ содержатся, и понеже ни $4n+2$, ниже $4n+3$ квадратъ быть не можетъ, то слѣдуетъ отсюда, что общая формула $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ никогда квадратъ не будетъ; ибо естьли бы t было четное число, то бы tt раздѣлилось на 4, а другой бы членъ раздѣленной на 4 оставилъ 3. Но когда оба числа t и u не четныя, то вышли бы остатки изъ tt и uu 1, слѣдовательно изъ цѣлой формулы осталось бы 2; но понеже нѣтъ ни одного числа, которое раздѣленное на 4 оставляетъ 2, былобъ квадратное. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ m, такъ и n, можно взять отрицательные и 0 такожде; почему ни формула $3tt+3uu$, ниже сія $3tt-uu$ квадратомъ быть не можетъ.

878.

Когда мы изъ теперешнихъ дѣлителей нашли, что нѣкоторые роды чиселъ,

селъ, никогда квадратами быть не могутъ то сіе самое имѢетъ также мѢсто и при всѢхъ другихъ дѢлителяхъ, а именно что есть нѢкоторые роды чиселъ, коихъ квадраты не возможны.

Пусть будетъ дѢлитель 7, то всѢ числа въ слѢдующихъ 7ми родахъ заключаются, которыхъ мы разсмотримъ также и квадраты.

роды	чиселъ,	ихъ квадраты	надлежитъ до рода
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III	$7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
VI.	$7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
IV.	$7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Понеже квадраты, которые на 7 не дѢлятся, содержатся въ одномъ изъ сихъ трехъ родовъ; $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, то другіе 3 рода изъ свойства квадратовъ совсѢмъ изключаются, кои суть $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$. Притчина сему

видна, потому что всегда два рода чиселъ найти можно, коихъ квадраты надлежатъ до однаго рода.

879.

Для уразумѣнія сего надлежитъ примѣчать, что послѣдней родъ $7n+6$ можетъ изъявиться также чрезъ $7n-1$, равнымъ образомъ формула $7n+5$, съ $7n-2$ одинаковы; такожде $7n+4$ то же, что и $7n-3$: но извѣстно что квадраты сихъ двухъ родовъ чиселъ $7n+1$ и $7n-1$ раздѣленные на 7, даютъ остатки одинакіе, а имянно 1цу; подобнымъ образомъ также квадраты сихъ двухъ родовъ $7n+2$ и $7n-2$ одинаковы.

880.

И такъ вообще, какого бы свойства дѣлитель ни былъ, котораго означимъ мы буквою d, то произшедшія оттуда разныхъ родовъ числа, суть слѣдующія:

dn

$dn+1$, $dn+2$, $dn+3$ и протч.

$dn-1$, $dn-2$, $dn-3$ и протч.

гдѣ квадраты изъ $dn+1$ и изъ $dn-1$ сіе общее имѣютъ, что раздѣленные на d даютъ остатокъ 1, и слѣдовательно оба надлежатъ до одного рода $dn+1$. Равнымъ образомъ то же бываетъ съ обоими родами $dn+2$ и $dn-2$, коихъ квадраты надлежатъ до рода $dn+4$.

И по сему вообще то же дѣлается съ двумя родами $dn+a$ и $dn-a$, коихъ квадраты раздѣленныя на d, даютъ одинакой остатокъ, а имянно aa, или такой же остатокъ, какъ когда aa раздѣлено на d.

881.

Симъ образомъ получится безконечное множество такихъ формулъ, какъ $att+buu$, кои никогда квадратами не будутъ; такъ изъ дѣлителя 7ми, легко познается, что ни одна изъ сихъ формулъ

мулъ $7tt + 3uu$; $7tt + 5uu$ и $7tt + 6uu$, никогда квадратомъ быть не можетъ; потому что u раздѣленное на 7, даетъ въ остаткѣ или 1, или 2, или 4. Потомъ изъ первой формулы остается или 3, или 6, или 5; а изъ второй или 5, или 3, или 6; изъ третей или 6, или 5, или 3 чему ни при какомъ квадратѣ статься не льзя. Ежели теперь такія формулы случатся, то тщетной будетъ трудъ попасть на такой случай, гдѣ бы могъ быти квадратъ, и для того сіе разсужденіе есть великой важности.

Но ежели предложенная формула не такого свойства будетъ, и можно отгадать нѣкоторой случай, въ которомъ здѣлается она квадратъ, то показано уже въ прежней главѣ, какимъ образомъ оттуда безконечное множество другихъ случаевъ находить должно.

Предложенная формула была собственно $axx + 1$, и понеже вмѣсто x находились обыкновенно дроби, для того клали мы $x = \frac{t}{u}$, такъ что сію формулу

ant

$att+buu$ квадратомЪ здѣлать должно было.

безконечное также множество бываетЪ случаевЪ гдѣ x и вЪ самыхЪ цѣлыхЪ числахЪ изъявленЪ быть можетЪ; а какимЪ образомЪ оные случаи находить, слѣдующая глава покажетЪ.

ГЛАВА VI.

О случаяхЪ, вЪ которыхЪ формула $axx+b$ будетЪ квадратЪ вЪ цѣлыхЪ числахЪ.

882.

Видѣли уже мы, какимЪ образомЪ формулу $a+bx+cxx$ перемѣнять должно, чтобЪ середней членЪ уничтожился; и по сему довольно будетЪ сЪ насЪ, когда мы настоящее разсужденіе кЪ сей только формулѣ $axx+b$ присвоимЪ; при чемЪ примѣчать надлежитЪ, что вмѣсто x одни цѣлыя числа, изЪ коихЪ

формула квадратъ будетъ, находить должно.

Прежде всего потребно здѣсь, чтобъ такая формула сама по себѣ была возможна; ежели же она не возможна, то и положенные вмѣсто x дроби, не упоминая о цѣлыхъ числахъ имѣть мѣста не могутъ.

883.

И такъ положи сїю формулу $axx + b = yy$, гдѣ буквы x и y цѣлыя числа быть должны, потому что a и b суть такїя же.

На сей конецъ необходимо нужно знать или угадать одинъ случай въ цѣлыхъ числахъ, ибо иначе весь бы трудъ былъ тщетной, искать больше такихъ случаевъ, ежели бы случилось, что сама формула не возможна.

Положимъ что сїя формула квадратомъ быть можетъ, ежели положится $x = f$, и пусть ея квадратъ будетъ $= gg$ такъ что $aff + b = gg$, гдѣ f и g извѣстныя числа, и слѣдовательно осталось теперь

перь только, какимЪ образомЪ изЪ сего случая другїе вывесть можно сїе разысканїе тѢмЪ важнѢе, чѢмЪ больше оно трудностямЪ подвержено, но кои мы преодолѢемЪ слѢдующими прїемами.

884.

Найдено уже, что $aff+b=gg$ и сверьхЪ сего должно быть $axx+b=yy$, вычти прежнее уравненїе изЪ сего послѢдняго, то получится $axx-aff=yy-gg$, что вЪ множителяхЪ представить можно такЪ: $a(x+f)(x-f)=(y+g)(y-g)$; помножь сЪ обѢихЪ сторонЪ на pq выдетЪ $apq(x+f)(x-f)=pq(y+g)(y-g)$: но чтобы вывесть оттуда равенство, то здѢлай сїе раздѢленїе $ap(x+f)=q(y+g)$ $q(x-f)=p(y-g)$, и изЪ сихЪ обоихЪ уравненїй ищи обѢ буквы x и y; первое раздѢливЪ на q даетЪ $y+g=\frac{apx+apf}{q}$, а второе раздѢливЪ на p даетЪ $y-g=\frac{qx-qf}{p}$ сїе вычти изЪ прежняго, останется $2g=\frac{f(qq+ppa)+x(app-qq)}{qp}$ помноживЪ на pq выдетЪ $2pqg=(app-qq)$

$x+(app+qq)f$ отсюда $x=\frac{2gpq}{app-qq}-\frac{(app+qq)f}{app-qq}$ а изъ сего потомъ найдется $y=g+\frac{2gqq}{app-qq}-\frac{(app+qq)fq}{(app+qq)p}-\frac{qf}{p}$, гдѣ первые два члена содержать букву g, кои соединивъ вмѣстѣ даютъ $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$, а другїе два члена имѣютъ букву f, и подъ однимъ знаменателемъ даютъ $-\frac{2afpq}{app-qq}$, слѣдовательно y получится $=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}$.

885.

Сей трудъ кажется, что съ нашимъ намѣренїемъ не сходствуетъ; ибо здѣсь пришли мы къ ломанным числамъ, когда намъ вмѣсто x и y цѣлыя числа искать должно; чего ради получили бы мы другой новой вопросъ, какїя числа вмѣсто p и q взять надлежитъ, чтобы избѣжать дроби, которой вопросъ еще труднѣе кажет-

кажется нежели нашЪ главной. Но можно здѣсь употребить другое искуство, коимЪ мы легко наше намѣреніе достигнемЪ; ибо когда здѣсь все вЪ цѣлыхЪ числахЪ изъявить должно, то положи $\frac{app+qq}{app-qq}=m$ и $\frac{2pq}{app-qq}=n$ дабы имѣть $x=ng-mf$, и $y=mg-nf$. Здѣсь не можемЪ мы взять m и n по изволенію; но они такЪ должны быть опредѣлены, чтобЪ сЪ прежними опредѣленіями сходствовали. На сей конецЪ разсмотримЪ мы ихЪ квадраты, и будетЪ $mm=\frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}$

а $nn=\frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q^4}$; откуда найдется

$$mm-ann=\frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4}$$

$$=\frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}=1.$$

886.

ИзЪ сего явствуетЪ, что числа m и n такого свойства быть должны, чтобЪ $mm=ann+1$; но понеже a есть

из-

извѣстное число, то прежде всего надлежитъ найти вмѣсто n такое цѣлое число, чтобъ $ann+1$ было квадратъ, котораго корень есть m, а какъ скоро оное найдется и сверьхъ того еще число f, чтобъ $aff+b$ было квадратъ т. е. gg, то получатся вмѣсто x и y слѣдующія величины въ цѣлыхъ числахъ; $x=ng-mf$, $y=mg-naf$, откуда $axx+b=yy$.

887.

Само собою явствуетъ, что когда однажды n найдено, то можно вмѣсто его поставить $-n$, потому что квадратъ онаго nn есть одинаковъ.

Для нахожденія x и y въ цѣлыхъ числахъ, чтобы $axx+b=yy$ было, надлежитъ прежде всего знать такой случай, чтобъ $aff+b=gg$ и какъ скоро сей случай извѣстенъ будетъ, то должно еще къ числу a найти такія числа m и n, чтобъ $ann+1=mm$ было; о чемъ въ слѣдующемъ показано будетъ. Когда же сіе здѣлано будетъ, то получится заразъ новой слу-

случай, а имянно $x = ng + mf$ и $y = mg + naf$, и будетъ $axx + b = yy$.

Поставь сей новой случай на мѣсто прежняго, которой былъ взятъ за извѣстной, и напиши $ng + mf$ вмѣсто f, а $mg + naf$ вмѣсто g, то получатся вмѣсто x и y новыя паки знаменованія, изъ которыхъ еще, когда они вмѣсто f и g поставятся, другія новыя выдутъ и такъ далѣе: такъ что ежели съ начала одинъ только такой случай былъ извѣстенъ, то изъ онаго безконечно много другихъ найти можно.

888.

Способъ доходить до сего рѣшенія нарочито труденъ, и казался съ начала не соотвѣтствовать нашему намѣренію, ибо мы нашли нарочито збивчивыя дроби кои особливымъ щастіемъ уничтожить удалось, и такъ не худо, ежели мы еще другой путь покажемъ, который ведетъ насъ къ слѣдующему рѣшенію.

889.

Когда должно быть $axx + b = yy$, и найдено уже $aff + b = gg$, то изъ онаго уравненія будетъ $b = yy - axx$; а изъ сего $b = gg - aff$.
Слѣдовательно $yy - axx = gg - aff$, и теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ изъ извѣстныхъ чиселъ f и g найти неизвѣстныя x и y, и тогда заразъ видно, что сїе уравненїе получится, когда положишь $x = f$ и $y = g$, но отсюда ни одного новаго случая не получишь кромѣ того, которой взятъ за извѣстной.

Для того положимъ, что вмѣсто n такое число найдено, что $ann + 1$ есть квадратъ, или что $ann + 1 = mm$, откуда будетъ $mm - ann = 1$. Симъ умножь прежняго уравненія часть $gg - aff$ будетъ $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. На сей конецъ положи $y = gm + afn$ получишь
$ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, гдѣ члены $ggmm$ и $aaffnn$ уничтожаются, и слѣдовательно выдетъ

$axx = affmm + aggnn + 2afgmn$, которое уравненіе раздѣливъ на a получится $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, которая формула, какъ видно, есть квадратъ и найдется $x = fm + gn$, что съ прежде найденною формулою согласуетъ.

890.

Сіе рѣшеніе потребно изъяснить, нѣкоторыми примѣрами.

Вопросъ. Найти всѣ цѣлыя числа вмѣсто x, такъ чтобъ $2xx - 1$ было квадратъ, или чтобъ $2xx - 1 = yy$. Здѣсь $a = 2$ и $b = -1$; первой случай тотчасъ виденъ, ежели возмется $x = 1$ и $y = 1$, изъ сего извѣстнаго случая имѣемъ мы $f = 1$ и $g = 1$; но требуется еще найти такое число вмѣсто n, чтобъ $2nn + 1$ было квадратъ, а имянно mm. Сіе учинится, когда $n = 2$ и $m = 3$. По сему изъ каждаго извѣстнаго случая f и g сей новой находимъ: $x = 3f + 2g$ и $y = 3g + 4f$; но извѣстной случай есть $f = 1$ и $g = 1$, для того слѣдующіе новые случаи найдутся.

$x = f$

$x = f = 1$	5	29	169
$y = g = 1$	7	41	239 и протч.

891.

Вопросъ. Найти всѣ треугольныя числа, которыя бы были вдругъ и квадратныя?

Пусть будетъ z корень треугольнаго числа, то самой треугольникъ $\frac{zz+z}{2}$, которой квадратъ быть долженъ, и когда корень онаго будетъ x, то $\frac{zz+z}{2} = xx$, помножь на 8 выдетъ $4zz + 4z = 8xx$; придай съ обѣихъ сторонъ 1, получится $4zz + 4z + 1 = (2z+1)^2 = 8xx + 1$. Дѣло состоитъ теперь въ томъ, чтобъ $8xx + 1$ было квадратъ и положивъ $8xx + 1 = yy$ будемъ $y = 2z + 1$; слѣдовательно искомой треугольника корень $z = \frac{y-1}{2}$; здѣсь $a = 8$ и $b = 1$ и извѣстной случай виденъ; а имянно $f = 0$ и $g = 1$; а что бы еще было $8nn + 1 = mm$, то $n = 1$ и $m = 3$, откуда получится $x = 3f + g$ и $y = 3g + 8f$, а $z = \frac{y-1}{2}$. Отсюда получаемъ мы слѣдующія рѣшенія:

$x = f$

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681	и протч.

892.

Вопросъ. Найти всѣ пятиугольныя числа, которыя бы были также и квадратныя?

Пусть будетъ корень пятиугольныхъ $= z$, то пятиугольникъ самъ $= \frac{3zz - z}{2}$, которой пусть будетъ равенъ квадрату xx; чего ради $3zz - z = 2xx$, помножь на 12 и придай 1, выдетъ $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z - 1)^2$, положи теперь $24xx + 1 = yy$. будетъ $y = 6z - 1$ и $z = \frac{y+1}{6}$; но понеже здѣсь $a = 24$, $b = 1$, то извѣстной случай $f = 0$ и $g = 1$. Потомъ должно быть $24nn + 1 = mm$, то возми $n = 1$, будетъ $m = 5$; и такъ получаемъ мы $x = 5f + g$, $y = 5g + 24f$ и $z = \frac{y+1}{6}$, или тогда $y = 1 - 6z$, то будетъ также $z = \frac{1-y}{6}$; откуда найдутся слѣдующія рѣшенія.

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
или $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{202}{3}$	$-800.$

893.

Вопросъ. Найти всѣ квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои когда помножатся на 7, и къ произведенію придастся 2 чтобъ вышли паки квадраты?

Здѣсь требуется, чтобъ $7xx + 2 = yy$, гдѣ $a = 7$, $b = 2$, извѣстной случай попадается, когда $x = 1$, будетъ $x = f = 1$ и $y = g = 3$, разсмотрѣвъ уравненіе $7nn + 1 = mm$ легко найдется, что $n = 3$ и $m = 8$, слѣдовательно $x = 8f + 3g$ и $y = 8g + 21f$, откуда выдутъ вмѣсто x и y слѣдующія знаменованія:

$x = f = 1$	17	271
$y = g = 3$	45	717.

894.

Вопросъ. Найти всѣ треугольныя числа, кои бы были вдругъ и пятиугольныя?

Пусть

Пусть корень треугольныхъ $=p$, а пятиугольныхъ $=q$, то должно быть $\frac{pp+p}{2}=\frac{3qq-q}{2}$, или $3qq-q=pp+p$; отсюда ищи q: понеже $qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, то $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3})}$ т. е. $q=\frac{1\pm\sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$ и дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ $12pp+12p+1$ было квадратъ, и притомъ въ цѣлыхъ числахъ; понеже здѣсь середней членъ $12p$ попадается, то положи $p=\frac{x-1}{2}$, чрезъ что получимъ мы $12pp=3xx-6x+3$ и $12p=6x-6$, слѣдовательно $12pp+12p+1=3xx-2$, что должно быть квадратъ. Положимъ еще $3xx-2=yy$, выдетъ $p=\frac{x-1}{2}$ и $q=\frac{1+y}{6}$ и все дѣло состоитъ въ формулѣ $3xx-2=yy$, гдѣ $a=3$, $b=-2$ и извѣстной случай $x=f=1$, $y=g=1$. Потомъ для уравненія $mm=3nn+1$ имѣемъ мы $n=1$ и $m=2$; откуда слѣдующія величины, вмѣсто x и y, а потомъ вмѣсто p и q получатся.

И такъ когда $x=2f+g$ и $y=2g+3f$ будетъ

	$x=f=$	1	3	11	41
	$y=g=$	1	5	19	71
	$p=$	0	1	5	20
	$q=$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
или	$q=$	0	$-\frac{2}{3}$	3	$-\frac{35}{3}$ потому что $q=\frac{1-y}{6}$.

895.

До сихъ мѣстъ принуждены были мы изъ предложенной формулы изключать второй членъ, когда онъ попадался; но можно также предписанной способъ употребить и къ такой формулѣ, гдѣ будетъ середней членъ, что мы здѣсь показать намѣрены. Пусть предложенная формула, которая должна быть квадратъ, будетъ сія $axx+bx+c=yy$ и пусть будетъ изъ оной случай уже извѣстенъ $aff+bf+c=gg$; вычти сіе уравненіе изъ прежняго, будетъ $a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg$, что во множителяхъ изобразится такъ: $(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)$, умножь съ обѣихъ сторонъ на pq, будетъ $pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g)$, что на двѣ части раздроблено быть можетъ:

I

I $p(x-f)=q(y-g)$; II $q(ax+af+b)=p(y+g)$ умножь первое уравненіе на p, а другое на q, и вычти прежнее изъ сего, то получится $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq$; отсюда найдемъ мы $x=\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}$, а изъ другаго уравненія будетъ $q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right)$; слѣдовательно $y-g=\frac{2gpp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$ и такъ $y=g\frac{(aqq+pp)}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$; а для избѣжанія сихъ дробей, положи какъ и прежде $\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m$ и $\frac{2pq}{aqq-pp}=n$, будетъ $m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp}$, слѣдовательно $\frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a}$, и такъ $x=ng-mf-b\frac{(m+1)}{2a}$, а $y=mg-naf-\frac{1}{2}bn$, гдѣ

буквы m и n такого свойства быть должны, какъ и выше сего, т. е. чтобъ $mm = ann + 1$.

836.

Но такимъ образомъ, найденныя формулы, вмѣсто x и y смѣшены еще съ дробями; ибо члены содержащїе букву b суть дроби, и слѣдовательно съ нашимъ намѣренїемъ не сходны. Но надлежитъ примѣчать, что ежели отъ сихъ величинъ къ слѣдующимъ придешь, то оныя всегда будутъ цѣлыя числа, и которыя изъ прежде взятыхъ чиселъ p и q очень легко найти можно; ибо возми p и q, такъ чтобъ $pp = aqq + 1$, и тогда $aqq - pp = -1$, то сами собою дроби пропадутъ, и найдется $x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$, а $y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$; но понеже въ извѣстномъ случаѣ $aff + bf + c = gg$, квадратъ только изъ gg входитъ, то все равно дастъ ли буква g знакъ $+$, или $-$; и такъ поставь $-g$, вмѣсто g, то будутъ наши формулы $x = 2gpq + f(aqq + pp) + bpq$ и $y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$ и тогда заподлинно будетъ $axx + bx + c = yy$.

Сыскать

Сыскать наприм. такія шестіугольныя числа, кои бы были вдругЪ и квадратныя?

ЗдѢсь должно быть $2xx - x = yy$, гдѢ $a = 2$, $b = -1$, и $c = 0$, извѢстной случай, какЪ видно есть $x = f = 1$ и $y = g = 1$.

Потомъ надлежитЪ быть $pp = 2qq + 1$, будетЪ $q = 2$ и $p = 3$, и такЪ получится $x = 12g + 17f - 4$ а $y = 17g + 24f - 6$, откуда слѢдующія найдутся знаменованія;

$x = f = 1$	25	841
$y = g = 1$	35	1189 и протч.

897.

Побудемъ еще нѢсколько при первой формулѢ, гдѢ средняго члена нѢтЪ и разсмотримЪ случаи, вЪ которыхЪ формула $axx + b$, будетЪ квадратЪ вЪ цѢлыхЪ числахЪ.

Пусть будетЪ $axx + b = yy$ и кЪ сему потребны двѢ вещи.

I. Знать такой случай, вЪ которомЪ сіе дѢлается; оной пусть будетЪ $aff + b = gg$.

II. Надлежитъ знать вмѣсто m и n такія числа, чтобъ $mm = ann + 1$, о чемъ въ слѣдующей главѣ показано будетъ

Отсюда теперь получается новой случай, а имянно: $x = ng + mf$ и $y = mg + anf$, откуда потомъ равнымъ образомъ другіе случаи сыскать можно. Кои мы представимъ такъ:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} x = f & A & B & C & D & E \\ y = g & P & Q & R & S & T \end{array}$$ и протч.

гдѣ

$$\begin{array}{l|l|l|l} A = ng + mf & B = nP + mA & C = nQ + mB & D = nR + mC \\ P = mg + anf & Q = mP + anA & R = mQ + aBn & S = mR + anC \end{array}$$

и протч.

которые оба рода чиселъ, легко можно продолжить далѣе, какъ кто пожелаетъ.

898.

Но по сему способу не можно продолжать верхняго ряду не зная нижняго, ниже нижняго, не зная верхняго. Но легко можно дать правило, верхней рядъ одинъ только продолжать не имѣя нужды знать нижней

нижней, которое правило служитъ также, и для нижняго ряду гдѣ не нужно, знать верхней. Цѣлыя числа, которыя вмѣсто x брать можно, идутъ въ извѣстной прогрессіи, коей каждой членъ напр. E, изъ двухъ предъидущихъ C и D опредѣляется, не имѣя нужды знать нижніе члены R и S; ибо тогда $E = 2mD - mmC + annC$ или $E = 2mD - (mm - ann)C$, а понеже $mm = ann + 1$, слѣдовательно $mm - ann = 1$, будетъ $E = 2mD - C$. Откуда явствуетъ, какимъ образомъ каждое изъ верхнихъ чиселъ опредѣляется изъ двухъ предъидущихъ. равнымъ образомъ тоже бываетъ и съ нижнимъ рядомъ; такъ $T = mS + anD$, но $D = nR + mC$, будетъ $T = mS + annR + amnC$, и когда еще $S = mR + anC$, то $anC = S - mR$, которую величину поставивъ вмѣсто anC получится, $T = 2mS - R$, такъ что нижней рядъ по тому же правилу, какъ и верхней продолжается.

Найти наприм. всѣ числа x, чтобъ $2xx - 1 = yy$, здѣсь $f = 1$ и $g = 1$, при томъ

$mm = 2nn + 1$, будетъ $n = 2$ и $m = 3$. И понеже $A = 5$, то первые два члена 1 и 5, изъ которыхъ слѣдующіе по сему правилу найдутся: $E = 6D - C$, т. е. каждой членъ взятой 6 разъ и уменшенъ предъидущимъ даетъ слѣдующей; и такъ искомыя числа вмѣсто x идутъ по сему правилу такимъ образомъ: 1, 5, 29, 169, 985, 5741 и протч.; откуда видно, что сіи числа безконечно далеко продолжиться могутъ. А ежели бы захотѣли взять дроби, то по прежде показанному способу еще бы безконечно большее множество найти можно было

ГЛАВА VII.

О особливомъ способѣ, формулу $ann + 1$ здѣлать квадратомъ въ цѣлыхъ числахъ.

899.

Предложеннаго въ прежней главѣ въ дѣйство произвѣсть не льзя, ежели не въ состояніи найти для каждаго числа a

такого n, что бы $ann+1$ было квадратъ, или чтобъ $ann+1=mm$.

Когда же пожелаешь довольствоваться ломаными числами, то сїе уравненїе легко рѣшить можно. Ибо положи только $m=1+\frac{np}{q}$, будетъ $mm=1+\frac{2np}{q}$ $+\frac{nnpp}{qq}=ann+1$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ 1 уничтожается; а остальныя члены на n могутъ раздѣлиться. Потомъ помноживъ на qq выдетъ $2pq+npp=anqq$, откуда найдется $n=\frac{2pq}{aqq-pp}$, откуда безконечное множество знаменованїй вмѣсто n найдется. Но понеже n цѣлое число быть должно, то сїе намъ нимало не помогаетъ, и слѣдовательно для нахожденїя его надлежитъ употребить совсемъ особливой способъ.

900.

Прежде всего надлежитъ примѣчать, что ежели $ann+1$ должно быть квадратъ въ цѣлыхъ числахъ, какое бы a число

ни было, то сему не всегда статься можно: ибо вопервыхъ всѣ тѣ случаи изключаются, въ которыхъ *a* отрицательное число, потомъ также и всѣ тѣ, гдѣ *a* квадратъ. Понеже тогда *ann* было бы квадратъ, но никакой квадратъ съ 1 вмѣстѣ квадрата въ цѣлыхъ числахъ не дѣлаетъ, и по сему формула наша должна быть такъ ограничена, чтобъ буква *a*, не была ни отрицательною, ни квадратомъ; но когда *a* есть положительное и притомъ не квадратное число, то можно завсегда вмѣсто *n* такое цѣлое найти число, чтобъ $ann + 1$ было квадратъ.

Естьли такое число сыскано, то изъ прежней главы легко можно вывесть безконечно много другихъ, но къ нашему намѣренїю довольно будетъ найти нѣкоторыя и притомъ самыя малыя.

901.

Для сего нѣкогда ученой Агличанинъ именемъ Пелль весьма остроумной способъ изобрѣлъ, которой мы здѣсь

изъ

изъяснить намѣрены. Оной есть такого свойства, что не для каждаго числа a вообще, но для каждаго случая его особливо употреблять можно. И такъ начнемъ съ послѣднихъ случаевъ и будетъ искать вмѣсто n такое число, чтобъ $2nn+1$ квадратъ было, или чтобъ $\sqrt{(2nn+1)}$ было извлекомое число.

Здѣсь легко видѣть можно, что сей квадратной корень будетъ больше нежели n, а менѣе нежели $2n$; чего ради положи его $=n+p$, гдѣ p заподлинно должно быть меньше нежели n. И такъ имѣемъ мы $\sqrt{(2nn+1)}=n+p$, слѣдовательно $2nn+1=nn+2np+pp$, откуда найдемъ n; но $nn=2np+pp-1$, слѣдовательно $n=p+\sqrt{(2pp-1)}$.

Здѣсь главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ $2pp-1$ было квадратъ, что учинится положивъ $p=1$, и найдется $n=2$, а $\sqrt{(2nn+1)}=3$.. Ежелибы сіе не такъ скоро вышло, то можнобы продолжать далѣе, и когда $\sqrt{(2pp-1)}$ больше нежели p и слѣдовъ n больше нежели $2p$, то

положи

положи $n = 2p + q$ и будетъ $2p + q = p + \sqrt{(2pp - 1)}$, или $p + q = \sqrt{(2pp - 1)}$ взявъ квадраты получится $pp + 2pq + qq = 2pp - 1$, или $pp = 2pq + qq + 1$, будетъ $p = q + \sqrt{(2qq + 1)}$, и такъ $2qq + 1$, должно быть квадратное число, что учинится когда $q = 0$, слѣдователно $p = 1$ и $n = 2$. Изъ сего примѣра можно уже имѣть понятїе о семъ способѣ, которой еще больше изъясненъ будетъ изъ слѣдующаго.

902.

Пусть будетъ $a = 3$ и что сїя формула $3nn + 1$ должна быть квадратъ, то положи $\sqrt{(3nn + 1)}, = n + p$ будетъ $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ и $2nn = 2np + pp - 1$, отсюда $n = \frac{p + \sqrt{(3pp\ 2)}}{2}$, но понеже $\sqrt{(3pp - 2)}$ больше нежели p и слѣдовательно n больше, нежели $\frac{2p}{2}$ или p, то положи $n = p + q$, будетъ $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp - 2)}$ или $p + 2q = \sqrt{(3pp - 2)}$, взявъ квадраты выдетъ $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$, или $2pp = 4pq + 4qq + 2$ т. е. $pp = 2pq + 2qq + 1$; по чему $p = q + \sqrt{(3qq + 1)}$ сїя формула данной равна, и слѣдо-

слѣдовательно $q = 0$, откуда $p = 1$, $n = 1$ и $\sqrt{(3nn + 1)} = 2$.

903.

Пусть будетъ $a = 5$ и формулу $5nn + 1$ здѣлать квадратомъ, котораго корень больше, нежели $2n$, то положи $\sqrt{(5nn + 1)} = 2n + p$ и получится $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, а $nn = 4np + pp - 1$, слѣдовательно $n = 2p + \sqrt{(5pp - 1)}$. Но понеже $\sqrt{(5pp - 1)}$ больше нежели $2p$, то и n также больше нежели $4p$; чего ради возми $n = 4p + q$, будетъ $2p + q = \sqrt{(5pp - 1)}$ или $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; откуда $pp = 4pq + qq + 1$, почему $p = 2q + \sqrt{(5qq + 1)}$ сїе учинится когда $q = 0$; слѣдовательно $p = 1$ и $n = 4$ и такъ $\sqrt{(5nn + 1)} = 9$.

904.

Положимъ еще $a = 6$, чтобы $6nn + 1$ было квадратъ, коего корень больше нежели $2n$, то возми $\sqrt{(6nn + 1)} = 2n + p$ будетъ $6nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ или $2nn = 4np + pp - 1$, слѣдов. $n = p + \frac{\sqrt{(6pp - 2)}}{2}$ или $n = \frac{2p + \sqrt{(6pp - 2)}}{2}$; почему n больше

нежели

нежели $2p$; для того положи $n = 2p + q$ будетъ $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$, или $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$: взявъ квадраты выдетъ $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$, или $2pp = 8pq + 4qq + 2$, или $pp = 4pq + 2qq + 1$; откуда найдется $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$, которая формула первой равна и слѣдов. можно положить $q = 0$, выдетъ $p = 1$, $n = 2$ по чему $\sqrt{(6nn + 1)} = 5$.

905.

Пусть еще $a = 7$ и $7nn + 1 = mm$, слѣдов. m больше нежели $2n$; чего ради положи $m = 2n + p$, будетъ $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, или $3nn = 4np + pp - 1$; откуда найдется $n = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$; но понеже n больше нежели $\frac{4}{3}p$ и слѣдов. больше нежели p, то возми $n = p + q$, будетъ $p + 3q = \sqrt{(7pp - 3)}$; взявъ квадраты выдетъ $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; $6pp = 6pq + 9qq + 3$, или $2pp = 2pq + 3qq + 1$, отсюда найдется $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$, но понеже здѣсь p больше нежели $\frac{3}{2}q$, и слѣдов. больше

шѣ нежели q, то поставь $p = q + r$. будетъ $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$ взявъ квадраты $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$, или $6qq = 4qr + 4rr - 2$, или $3qq = 2qr + 2rr - 1$, по чему найдется $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$; но понеже q больше нежели r, то положи $q = r + s$, будетъ $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$ взявъ квадраты $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, или $3rr = 12rs + 9ss + 3$ и $rr = 4rs + 3ss + 1$ слѣдов. $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$, и сїя формула прежней равна, то возми $s = 0$ и получится $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ и $n = 3$ откуда $m = 8$.

Сїе изчисленїе можно сократить слѣдующимъ образомъ, что и въ другихъ случаяхъ мѣсто имѣетъ. Когда $7nn + 1 = mm$, то m меньше нежели $3n$, чего ради возми $m = 3n - p$, будетъ $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, или $2nn = 6np - pp + 1$, отсюда $n = \frac{3p + \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$, слѣдоват. n менше нежели $3p$; для того положи $n = 3p - q$ будетъ $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$, взявъ квадраты $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$ или $2pp = 12pq - 4qq + 2$ и $pp = 6pq - 2qq + 1$; откуда $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$, здѣсь за-

разъ поставить можно $q = o$, будетъ $p = 1$ и $n = 3$, наконецъ $m = 8$ какъ и прежде.

906.

Возмемъ еще $a = 8$ такъ чтобы $8nn + 1 = mm$, по чему m менше нежели $3n$, для того положи $m = 3n - p$, будетъ $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, или $nn = 6np - pp + 1$; откуда $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, которая формула равна первой, то можно положить $p = o$, и получится $n = 1$, а $m = 3$.

907.

Равнымъ образомъ поступай съ каждымъ другимъ числомъ a, ежели только оно положительное и не квадратъ, то придешь на конецъ на такой коренной знакъ, которой съ предложенною формулою сходенъ, какъ наприм. сей $\sqrt{(att + 1)}$, гдѣ должно положить $t = o$, въ которомъ случаѣ неизвлекомость пропадетъ, а потомъ возвращаясь назадъ получишь величину для n, чтобъ $ann + 1$ было квадратъ.

Иногда

Иногда скоро можно дойти до желаемаго, а иногда многія къ тому дѣйствія требуются по состоянію числа a, о которомъ извѣстныхъ признаковъ дать не можно, до числа 13 идетъ нарочито скоро; а когда $a=13$, то вычисленіе будетъ гораздо пространнѣе, и для того не худо изъяснить сей случай подробнѣе.

908.

И по сему пусть будетъ $a=13$; такъ что должно быть $13nn+1=mm$, понеже здѣсь mm больше нежели $9nn$, слѣдов. m больше нежели $3n$, то возми $m=3n+p$, будетъ $13nn+1=9nn+6np+pp$, или $4nn=6np+pp-1$, откуда $n=\frac{3p+\sqrt{(13pp-4)}}{4}$ по чему n больше нежели $\frac{6}{4}p$, и слѣдов. больше нежели p, то положи $n=p+q$, выдетъ $p+4q=\sqrt{(13pp-4)}$; взявъ квадраты $13pp-4=pp+8pq+16qq$, $12pp=8pq+16qq+4$ раздѣливъ на 4, $3pp=2pq+4qq+1$, откуда $p=\frac{q+\sqrt{(13qq+3)}}{3}$. Здѣсь p больше нежели $\frac{q+3q}{3}$, слѣдов. больше нежели q: и такъ возми $p=q+r$ будетъ $2q+3r=\sqrt{(13qq+3)}$ взявъ, квадратъ,

$13qq+3=4qq+12qr+9rr$, т. е. $9qq=12qr+9rr-3$, раздѣлив на 3, $3qq=4qr+3rr-1$, откуда $q=\frac{2r+\sqrt{(13rr-3)}}{3}$, гдѣ q больше нежели $\frac{2r+3r}{3}$, и слѣдов. больше нежели r, чего ради положи $q=r+s$ будет $r+3s=\sqrt{(13rr-3)}$; взяв квадраты $13rr-3=rr+6rs+9ss$, или $12rr=6rs+9ss+3$ раздѣлив на 3; $4rr=2rs+3ss+1$, отсюда $r=\frac{s+\sqrt{(13ss+4)}}{4}$. Здѣсь r больше нежели $\frac{s+3s}{4}$, или s, для того возми $r=s+t$, будет $3s+4t=\sqrt{(13ss+4)}$; взяв квадраты $13ss+4=9ss+24st+16tt$ и $4ss=24st+16tt-4$, раздѣлив на 4 получится $ss=6st+4tt-1$, почему $s=3t+\sqrt{(13tt-1)}$, и слѣд. s больше нежели $3t+3t$, или $6t$, чего ради положи $s=6t+u$. будет $3t+u=\sqrt{(13tt-1)}$; взяв квадраты, $13tt-1=9tt+6tu+uu$, откуда $4tt=6tu+uu+1$ и $t=\frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, гдѣ t больше нежели $\frac{6u}{4}$, и слѣдов. больше нежели u, для того положи $t=u+v$, будет $u+4v=\sqrt{(13uu+4)}$; взяв квадраты получится $13uu+4=uu+8uv+16vv$ и $12uu=8uv+16$

$+16vv-4$, раздѣливъ на 4, выдетъ $3uu = 2uv + 4vv - 1$; почему $u = \frac{v + V(13vv-3)}{3}$, гдѣ u больше нежели $\frac{4}{3}v$, и слѣдов. больше нежели v, то положи $u = v + x$, будетъ $2v + 3x = V(13vv-3)$, взявъ квадраты $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$, или $9vv = 12vx + 9xx + 3$, раздѣливъ на 3, $3vv = 4vx + 3xx + 1$, откуда $v = \frac{2x + V(13xx+3)}{3}$, гдѣ v больше нежели $\frac{5}{3}x$, и слѣдов. больше нежели x, для того положи $v = x + y$, будетъ $x + 3y = V(13xx + 3)$ взявъ квадраты $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$, или $12xx = 6xy + 9yy - 3$, раздѣливъ на 3 выдетъ $4xx = 2xy + 3yy - 1$ и $x = \frac{y + V(13yy-4)}{4}$; гдѣ x больше нежели y, для того положи $x = y + z$, будетъ $3y + 4z = V(13yy-4)$, взявъ квадраты $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$, или $4yy = 24yz + 16zz + 4$: раздѣливъ на 4 $yy = 6yz + 4zz + 1$, отсюда $y = 3z + V(13zz+1)$ и сія формула наконецъ равна первой, то положи $z = 0$ и возвратясь назадъ, получишь какъ слѣдуетъ:

$z = 0$

$y = 1$

$x = y + z = 1$

$v = x + y = 2$

$u = v + x = 3$
$t = u + v = 5$
$s = 6t + u = 33$
$r = s + t = 38$
$q = r + s = 71$
$p = q + r = 109$
$n = p + q = 180$
$m = 3n + p = 649$

слѣдов. 180 послѣ 0 есть самое меньшее цѣлое число вмѣсто n, чтобъ $13nn + 1$ было квадратъ.

909.

Изъ сего примѣра довольно явствуетъ, сколь продолжительно иногда такое вычисленїе бываетъ, а въ большихъ еще числахъ требуется въ десять разъ больше дѣла, нежели сколько было при числѣ 13, да и неможено напередъ видѣть при какихъ числахъ столь великой трудъ надобенъ; для того труды другихъ надлежитъ употреблять въ свою пользу и здѣлать таблицу, гдѣ для всѣхъ чиселъ, а отъ 1 до 100 знаменованія буквъ *m* и *n* изображены, дабы въ

случаѣ

случаѣ можно было взять для каждаго числа a надлежащіе буквы m и n.

910.

Между тѣмъ надлежитъ примѣчать, что при нѣкоторыхъ родахъ чиселъ знаменованія чиселъ m и n вообще найти можно; но сіе дѣлается при тѣхъ только числахъ, которыя единицею или двумя менше, или больше квадратнаго числа, что особливаго достойно показанія.

911.

По сему пусть будетъ $a = ee - 2$, или двумя менше квадратнаго числа, и должно быть $(ee - 2)nn + 1 = mm$; то явно есть, что m менше нежели en, для того положи $m = en - p$, будетъ $(ee - 2)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, или $2nn = 2enp - pp + 1$ и отсюда $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, гдѣ заразъ видно что взявъ $p = 1$ коренной знакъ уничтожится и будетъ $n = e$, а $m = ee - 1$.

Когда бы было наприм. $a = 23$, гдѣ $e = 5$, то будетъ $23nn + 1 = mm$; ежели

$n=5$ и $m=24$, то само чрезъ себя также явствуетъ, что положивъ $n=e$ т. е. когда $a=ee-2$, выдетъ $ann+1=e^4-2ee+1$ квадратъ изъ $ee-1$.

912.

Пусть будетъ $a=ee-1$, т. е. единицею менше квадратнаго числа и должно быть $(ee-1)nn+1=mm$; то здѣсь опять m менше нежели en, для того положи $m=en-p$, будетъ $(ee-1)nn+1=eenn-2enp+pp$, или $nn=2enp-pp+1$, отсюда $n=ep+\sqrt{(eepp-pp+1)}$ гдѣ коренной знакъ уничтожится, когда $p=1$ и получится $n=2e$, а $m=2ee-1$. Сїе легко видѣть можно; ибо когда $a=ee-1$ и $n=2e$, то $ann+1=4e^4-4ee+1$ квадратъ изъ $2ee-1$. Пусть на прим. $a=24$ такъ что $e=5$, найдется $n=10$ и $24nn+1=2401=49^2$.

913.

Положимъ еще $a=ee+1$, или 1 цею больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+1)nn+1=mm$, гдѣ m, какъ видно, больше нежели en, для того возми $m=ne+p$

$+p$, будетъ $(ee+1)nn+1 = eenn+2enp+pp$, или $nn = 2enp+pp-1$, откуда $n = ep + \sqrt{(eepp+pp-1)}$, гдѣ $p=1$ взять должно и выдетъ $n=2e$, $m=2ee+1$. Сie легко усмотрѣть можно ибо когда $a=ee+1$ и $n=2e$, то $ann+1 = 4e^4+4ee+1$ квадратъ изъ $2ee+1$. Возми на прим. $a=17$ такъ что $e=4$, будетъ $17nn+1=mm$, когда $n=8$ и $m=33$.

914.

Пусть будетъ наконецъ $a=ee+2$, или двумя больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+2)nn+1=mm$. Здѣсь видно, что m больше нежели en, чего ради положи $m=en+p$, выдетъ $eenn+2nn+1 = eenn+2enp+pp$ или $2nn=2enp+pp-1$, отсюда $n+\frac{ep+\sqrt{(eepp+2pp-2)}}{2}$; возми теперь $p=1$ будетъ $n=e$ и $m=ee+1$, что заразъ видно, что ежели $a=ee+2$ и $n=e$, будетъ $ann+1 = e^4+2ee+1$ квадратъ изъ $ee+1$. Положимъ на прим $a=11$, такъ что $e=3$, то получится $11nn+1=mm$, когда $n=3$ и $m=10$; естьли жебы похотѣли взять $a=83$, то было бы $e=9$, и найдется $83nn+1=mm$, когда возмется $n=9$ и $m=82$.

Таблица чиселЪ *m* и *n*, изчисленныхЪ для всѣхЪ величинЪ числа *a* отЪ 2 до 100, такЪ что $mm = ann + 1$

a	*n*	*m*	*a*	*n*	*m*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

ГЛАВА

ГЛАВА VIII

О способѣ не извлекомую формулу $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$ здѣлать раціональною

915.

Мы приступаемъ теперь къ формулѣ, въ которой x до третьей степени возвышенъ, а потомъ пойдемъ далѣе къ четвертой, не смотря на то что сіи оба случая подобнымъ образомъ разсматривать должно.

И такъ пусть сію формулу $a+bx+cxx+dx^3$ квадратомъ здѣлать надлежитъ. На сей конецъ потребны надлежащіе величины вмѣсто x въ раціональныхъ числахъ, и понеже въ семъ большее уже затрудненіе бываетъ, то требуется также больше и искуства находить только ломаныя числа вмѣсто x и ими принуждены довольствоваться, а не требовать рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ. Прежде всего примѣчать здѣсь должно, что

никакого

никакого всеобщаго рѣшенія дать не льзя, какѣ то прежде было; но каждое дѣйствіе даетѣ намѣ знать одно только знаменованіе вмѣсто x, когда напротивѣ того прежней способѣ ведетѣ вдругѣ кѣ безконечно многимѣ рѣшеніямѣ

916.

Когда вѣ преждепоказанной формулѣ $a+bx+cxx$ было безконечно много случаевѣ, гдѣ рѣшенія совсемѣ невозможны, то случается сіе гораздо чаще сѣ теперешнею формулою. гдѣ ни обѣ одномѣ рѣшеніи упоминать не льзя, ежели одного еще неизвѣстно или неугадано; того ради для сихѣ только случаевѣ дать мы правила вѣ состояніи, помощію которыхѣ изѣ одного извѣстнаго рѣшенія новое найти можемѣ, изѣ котораго потомѣ равнымѣ образомѣ другое новое найдется, и сіе дѣйствіе далѣе продолжать можно.

Но между тѣмѣ часто случается что хотя одно рѣшеніе и извѣстно, то однакожѣ

накожъ изъ онаго о другомъ заключать не льзя, такъ что въ семъ случаѣ одно только рѣшенїе мѣсто имѣетъ, которое обстоятельство особливаго примѣчанїя достойно. Ибо въ предъидущемъ случаѣ изъ одного рѣшенїя безконечно много новыхъ найти можно было.

917.

И такъ когда сїя формула $a+bx+cxx+dx^3$ должна быть квадратъ, то непремѣнно нужно одинъ уже случай знать, въ которомъ она квадратомъ бываетъ. Такой случай легко видѣть можно, ежели первой членъ будетъ квадратъ, и формула изобразится такъ: $ff+bx+cxx+dx^3$, которая по видимому будетъ квадратъ, когда положится $x=0$.

Для того взявъ вопервыхъ сїю формулу разсмотримъ какимъ образомъ изъ извѣстнаго случая $x=0$ другое знаменованїе вмѣсто x найти можно. Сїе можемъ мы совершить двумя образами, изъ которыхъ каждой особливо изъяснить

мы

мы здѣсь намѣрены, притомъ не худо будетъ здѣлать начало съ особенныхъ случаевъ.

918.

Пусть сїю формулу $1+2x-xx+x^3$ надлежитъ здѣлать квадратомъ. Понеже здѣсь первой членъ 1 есть квадратъ, то возми корень сего квадрата такъ, чтобъ первые члены уничтожились; и для того положи квадратной корень $=1+x$, коего квадратъ нашей формулѣ долженъ быть равенъ и получится $1+2x-xx+x^3=1+2x+xx$, гдѣ переднїе два члена уничтожаются и выходитъ сїе уравненїе $xx=-xx+x^3$, или $x^3=2xx$; раздѣливъ на xx получится $x=2$, почему формула наша будетъ $1+4-4+8=9$.

Равнымъ образомъ когда сїя формула $4+6x-5xx+3x^3$ должна быть квадратъ, то положи корень $=2+nx$, и опредѣли n такъ чтобъ оба первые члена уничтожились. Понеже $4+6x-5xx+3x^3=4+4nx+nnxx$, то должно быть $4n=6$, слѣдов. $n=\frac{3}{2}$,

откуда слѣдующее уравненїе выходитъ, $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$, или $3x^3=\frac{29}{4}xx$; откуду $x=\frac{29}{12}$, которое знаменованїе дѣлаетъ формулу нашу квадратомъ, коего корень $=2+\frac{3}{2}x=\frac{45}{8}$.

919.

Другой способъ состоитъ въ томъ, чтобъ въ корнѣ были 3 члена, яко $f+gx+hxx$, кои бы такого были свойства, чтобъ въ уравненїи т. и переднїе члена уничтожились.

Пусть дана наприм. слѣдующая формула: $1-4x+6xx-5x^3$; положивъ корень ея $=1-2x+hxx$, должно быть $1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx-4hx^3+hhx^4$ $+2hxx$, гдѣ первые два члена пропадаютъ, а чтобъ и третей уничтожился, то надлежитъ быть $6=2h+4$ и слѣдов. $h=1$; отсюда получаемъ мы $-5x^3=-4x^3+x^4$, раздѣливъ на x^3 получится $-5=4+x$ и $x=-1$.

920.

Сіи два способа употреблять можно когда первой членѣ a есть квадратѣ, и имѣетѣ свое основаніе на томѣ, что по первому способу даетѣ два члена вѣ корнѣ, какѣ $f+px$, гдѣ f квадратной корень перваго члена; а p берется такѣ чтобѣ второй членѣ уничтожился и слѣдов. третей только и четвертой члены нашей формулы т. е. $cxx+dx^3$ сравнивать должно сѣ $ppxx$. и тогда раздѣливѣ уравненіе на xx выдетѣ новое знаменованіе вмѣсто x, которое будетѣ $=\frac{pp-c}{d}$. Во второмѣ способѣ берутся три члена корня и полагается оной $=f+px+qxx$ т. е. когда $a=ff$, а p и q опредѣляются такѣ, чтобѣ первые 3 члена уничтожились, что дѣлается такимѣ образомѣ: когда

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fp+\genfrac{}{}{0pt}{}{2fqxx}{+ppxx}+2pqx^3+qqx^4$$

то должно $b=2fp$, слѣдов. $p=\frac{b}{2f}$; а $c=2fq+pp$, слѣдов. $q=\frac{c-pp}{2f}$, а осталь-

ное $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$ можетъ раздѣлиться на x^3 и найдется $x = \frac{d-2pq}{qq}$.

921.

Между тѣмъ часто случается, что хотя $b = ff$; однакожъ по симъ способамъ величины вмѣсто x опредѣлить не льзя, какъ изъ сей формулы $ff + dx^3$ явствуетъ, гдѣ втораго и третьяго члена нѣтъ; ибо положи по первому способу корень $f + px$ такъ чтобы $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, то должно быть $0 = 2fp$ и $p = 0$, откуда получится $dx^3 = 0$, и $x = 0$, что не даетъ новаго знаменованія.

А ежели возмется корень по второму способу $f + px + qxx$ такъ чтобъ $ff + 2fpx + \underset{+ppxx}{2fqxx} + 2pqx^3 + qqx^4 = ff + dx^4$, то выдетъ $0 = 2fp$, $p = 0$ и $2fq + pp = 0$ слѣдов. $q = 0$, откуда $dx^3 = 0$ и паки $x = 0$.

922.

Въ такихъ случаяхъ инаго дѣлать нѣчего, какъ только что смотрѣть, не

не можно ли отгадать такой величины вмѣсто x, чтобы формула была квадратъ, а изъ нее уже потомъ можно найти по прежнему способу новую величину вмѣсто x; что также учинитьс я можетъ, хотя первой членъ и не квадратъ.

Для показанія сего положимъ что формула $3+x^3$ должна быть квадратъ, сіе учинится ежели $x=1$: и такъ положивъ $x=1+y$ получится сія формула $4+3y+3yy+y^3$, въ которой первой членъ есть квадратъ; для того положи корень онаго по первому способу $2+py$, будетъ $4+3y+3yy+y^3=4+4py+ppyy$, гдѣ для уничтоженія втораго члена должно быть $3=4p$ слѣдов. $p=\frac{3}{4}$ и получится $3+y=pp$, $y=pp-3=\frac{9}{16}-\frac{48}{16}=-\frac{39}{16}$ почему $x=-\frac{23}{16}$ новая величина вмѣсто x.

Положи еще по второму способу корень $=2+py+qyy$ будетъ $4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+2pqy^3+qqy^4$, гдѣ
$$+ppyy$$
для уничтоженія втораго члена должно быть $3=4p$, или $p=\frac{3}{4}$, а чтобы третей

членъ уничтожить, то $3 = 4q + pp$, слѣдов. $q = \frac{3-pp}{4} = \frac{183}{64}$ и будетъ $1 = 2pq + qqy$, откуда $y = \frac{1-2pq}{qq}$, или $y = \frac{352}{1521}$; слѣдов. $x = \frac{1878}{1521}$.

923.

Теперь покажемъ, когда уже одна величина сыскана, какимъ образомъ другую новую находить должно. Сїе представимъ мы вообще въ сей формулѣ $a + bx + cxx + dx^3$, о которой уже извѣстно, что она будетъ квадратъ, ежели $x = f$, и что тогда будетъ $a + bf + cff + df^3 = gg$, потомъ положи $x = f + y$, то получится сїя новая формула,

$$\begin{array}{l} a \\ + bf + by \\ + cff + 2cfy + cyy \\ + df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3 \\ \hline gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3df)yy + dy^3, \end{array}$$

въ которой формулѣ первой членъ есть квадратъ и слѣдов. оба прежнїе способа употребить можно; чрезъ что новые величины вмѣсто y и слѣдовательно также вмѣсто x получатся, а имянно $x = f + y$.

924.

Но иногда сїе совсемъ ничего не помагаетъ, хотя величину вмѣсто x и отгадалъ, какъ то въ сей формулѣ дѣлается $1+x^3$, которая будетъ квадратъ, ежели возмется $x=2$, и такъ полагая $x=2+y$ выдетъ сїя формула $9+12y+6yy+y^3$, которая должна быть квадратъ, коего корень по первому способу пусть будетъ $3+py$, то $9+12y+6yy+y^3=9+6py+ppyy$, гдѣ должно быть $12=6p$ и $p=2$; потомъ $6+y=pp=4$, слѣдов. $y=-2$ откуду $x=0$, изъ котораго знаменованїя далѣе ничего найти не можно. Но ежели возметъ корень по второму способу $3+py+qyy$, будетъ $9+12y+6yy+y^3=9+6py{+6qyy \atop ppyy}+2pqy^3+qqy^4$, гдѣ должно быть во первыхъ $12=6p$ и $p=2$, потомъ $6=6q+pp=6q+4$, слѣдов. $q=\frac{1}{3}$; отсюда получится $1=2pq+qqy=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}y$, почему $y=-3$, слѣдов. $x=-1$, а $1+x^3=0$, откуда далѣе ничего заключить не льзя; ибо ежели бы положили $x=-1+z$, то вышла бы

сія формула $3z - 3zz + z^3$, гдѣ первой членъ совсемъ уничтожается и слѣдов. ни того ни другаго способу употребить не можно. Изъ сего довольно явствуетъ, что сія формула $1 + x^3$ квадратомъ быть не можетъ, выключая сіи 3 случая: I) $x = 2$, II) $x = 0$, III) $x = -1$, что также и изъ другихъ основаній доказать можно.

925.

Для упражненія разсмотримъ еще сію формулу $1 + 3x^3$, которая въ сихъ случаяхъ будетъ квадратъ I) $x = 0$, II) $x = 1$, III) $x = 2$; и поглядимъ можно ли еще другіе такіе величины найти.

Понеже извѣстно, что $x = 1$, то положи $x = 1 + y$ и получится $4 + 9y + 9yy + 3y^3$; изъ сего корень пусть будетъ $2 + py$, такъ что $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, гдѣ $9 = 4p$, слѣдов. $p = \frac{9}{4}$, а остальные члены $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$ и $y = -\frac{21}{16}$; по чему $x = \frac{-5}{16}$. $1 + 3x^3$ слѣдов. будетъ квадратъ, котораго корень $= -\frac{61}{64}$, или также $= + \frac{61}{64}$. Ежели бы еще далѣе положить $x = \frac{-5}{16} + z$, то

можно

можно бы было найти оттуда другїя новыя величины. А естьли бы за благо разсудилось положить корень прежней формулы по второму способу $= 2 + py + qyy$, такЪ что бы $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, то должно $+ ppyy$ бы быть $9 = 4p$, слѣдов: $p = \frac{9}{4}$, потомЪ $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{16}$, по чему $q = \frac{63}{64}$; а изЪ остальныхЪ членовЪ будетЪ $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{128} + qqy$, или $576 + 128qqy = 384$, или $128qqy = -183$, или $126.\frac{63}{64}y = -183$, или $42.\frac{63}{64}y = -61$, будетЪ $y = -\frac{1952}{1323}$, слѣдов. $x = -\frac{629}{1323}$, и по прежнему показанїю другїя новыя найдутся.

926.

ЗдѣсЬ изЪ извѣстнаго случая $x = 1$ вывели уже мы двѣ новыя величины, изЪ которыхЪ, естьли кто на себя трудЪ принять похочетЪ, другїя новыя найти можно; но чрезЪ то попадетЪ онЪ на весьма большїе дроби.

Сего ради имѣемЪ мы причину удивляться, что изЪ сего случая $x = 1$ не

можно вывесть другаго $x = 2$, которой также легко виденъ, что безъ сомнѣнія есть знакомъ несовершенства найденнаго предъ симъ способа.

Также изъ случая $x = 2$ можно найти другїя новыя величины. На сей конецъ возми $x = 2 + y$, такъ что $25 + 36y + 18yy + 3y^3$ должно быть квадратъ, коего корень по первому способу, пусть будетъ $5 + py$, то $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + ppyy$ и найдется $36 = 10p$, или $p = \frac{12}{5}$.

Протчїе же члены раздѣливъ на yy, дадутъ $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, слѣдов. $y = -\frac{40}{25}$, и $x = \frac{8}{25}$; по чему $1 + 3x^3$ будетъ квадратъ, коего корень есть $5 + py = -\frac{131}{125}$, или $+\frac{131}{125}$. По второму же способу положивъ корень $5 + py + qyy$ будетъ $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + \substack{10qyy \\ qqyy} + 2pqy^3 + qqy^4$, гдѣ для уничтоженія втораго и третьяго члена должно быть $36 = 10p$, или $p = \frac{12}{5}$; потомъ $18 = 10q + pp$ и $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, и $q = \frac{63}{125}$; остальные же члены раздѣливъ на y^3 даютъ $3 = 2pq + qqy$,

или

или $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$, слѣдов. $y = -\frac{5275}{1323}$, а $x = -\frac{629}{1323}$.

927.

Сїе вычисленїе продолжительно и трудно въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ по другимъ основанїямъ очень легко общее рѣшенїе дать можно; какъ въ сей формулѣ $1 - x - xx + x^3$, здѣсь можно взять вообще $x = nn - 1$, а n означаетъ каждое произволящее число. Когда $n = 2$, будетъ $x = 3$, и наша формула $1 - 3 - 9 + 27 = 16$ ежели возмется $n = 3$, выдетъ $x = 8$ и формула наша $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Но здѣсь совсемъ особливое обстоятельство бываетъ, отъ котораго сїе легкое рѣшенїе зависитъ, и которое легко усмотрѣть можно, ежели мы нашу формулу раздробимъ на множитетелей то увидимъ, что она на $1 - x$ раздѣлится и частное выдетъ $1 - xx$, которое еще состоитъ изъ сихъ множителей $(1 - x)(1 + x)$, такъ что наша формула получитъ сей видъ $1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2(1 + x)$. Ежели она

 дол-

должна быть квадратъ, то понеже квадратъ раздѣленной на квадратъ, въ частномъ даетъ квадратъ, $1+x$ должно быть квадратъ; и обратно когда $1+x$ квадратъ, то будетъ такожде $(1-x)^2(1+x)$ квадратъ, для того положи только $1+x=nn$, то получится заразъ $x=nn-1$. Ежели бы сего обстоятельства примѣчено не было, то трудно бы по вышепоказаннымъ способамъ найти шесть только знаменованій вмѣсто x.

928.

При каждой формулѣ весьма изрядное дѣло, раздроблять ея на множителей, ежели только возможно. Какимъ образомъ сіе дѣлается, о томъ уже выше показано; а имянно, положи данную формулу $=0$ и ищи корень сего уравненія; ибо тогда каждой корень наприм. $x=f$ даетъ множителя $f-x$, которое разысканіе тѣмъ легче здѣлать можно, когда ищутся здѣсь одни только раціональные корни, кои всѣ суть дѣлители числъ порознь взятыхъ.

929.

Сїе обстоятельство находится при нашей формулѣ $a+bx+cxx+dx^3$, когда первые два члена уничтожатся, такъ что $cxx+dx^3$ должно быть квадратъ; но раздѣливъ сїю формулу на xx, частному, т. е. $c+dx$ неотмѣнно надлежитъ быть паки квадратомъ; положи $c+dx$ $=nn$, и найдется $x=\frac{nn-c}{d}$, которое знаменованїе вдругъ безконечно многїя и притомъ всѣ возможныя рѣшенїя въ себѣ содержитъ.

930.

Ежели при употребленїи втораго члена буквы p опредѣлять не похочешь, чтобы второй членъ уничтожился, то попадешь на другую неизвлекомую формулу, которую должно будетъ здѣлать рацїональною.

Пусть предложенная формула будетъ $ff+bx+cxx+dx^3$; положи ея корень $=f+px$, и получится $ff+bx+cxx+dx^3$ $=ff+2fpx+ppxx$, гдѣ первые члены уничтожатся, а остальные раздѣливъ на x, даютъ

даютЪ $b+cx+dxx=2fp+ppx$, которое уравненіе есть квадратное, отсюда найдется x какЪ слѣдуетЪ: $dxx=ppx-cx+2fp-b$, слѣдов.

$$x=\frac{pp-c+\surd(p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd)}{2d}.$$

Теперь дѣло состоитЪ, чтобЪ найти вмѣсто p, такіе величины, при которыхЪ бы формула $p^4-2cpp+8dfp+cc-4bd$ была квадратЪ. Но понеже здѣсь четвертая степень числа p попадается, то надлежитЪ сей случай до слѣдующей главы.

ГЛАВА IX.

О способѣ неизвлекомую формулу $\surd(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)$ здѣлать извлекомою.

931.

Теперь пришли мы кЪ такой формулѣ, гдѣ неопредѣленное число x до четвертой степени возвышено, при чемЪ должно намЪ окончать разысканіе о квад-

ратномЪ

ратномѣ коренномѣ знакѣ : ибо столь далеко мы еще не дошли, чтобѣ дѣлать квадратами такїе формулы, гдѣ вышшїе степени числа x попадаются.

При сей Формулѣ 3 случая входятѣ вѣ разсужденїе, изѣ коихѣ первой бываетѣ, когда первой членѣ a квадратѣ, другой ежели послѣдней членѣ квадратѣ; и на конецѣ, когда первой и послѣдней вдругѣ квадраты, которые 3 случая порознь разсмотрѣть мы здѣсь намѣрены.

932.

I разрѣшенїе формулы $V(ff+bx+cxx+dx^3+ex^4)$. Понеже здѣсь первой членѣ квадратѣ, то по первому способу можно положить корень $=f+px$ и p опредѣлить такѣ, чтобѣ оба первые члены уничтожились, а остальные бы на xx могли раздѣлиться; но однакожѣ вѣ уравненїи было бы еще xx и слѣдов. при опредѣленїи числа x потребенѣ бы былѣ новой коренной знакѣ; для того возмемѣ заразѣ второй способѣ и положимѣ

корень

корень $=f+px+qxx$, потомъ буквы p и q такъ надлежитъ опредѣлить, чтобъ три первые члена вонъ вышли, а остальные бы на x^3 могли раздѣлиться; и тогда получится одно простое уравненіе, изъ котораго x безъ коренна-го знака опредѣлится.

933.

По сему возми корень $=f+px+qxx$, и должно быть $ff+bx+cxx+dx^3+ex^4$ $=ff+2fpx+2fqxx+2pqx^3+qqx^4$, гдѣ $+ppxx$ первые члены сами собою уничтожаются; для втораго положи $b=2fp$, или $p=\frac{b}{2f}$, для третьяго члена должно быть $c=2fq+pp$, или $q=\frac{c-pp}{2f}$, и по учиненіи сего остальные члены могутъ раздѣлиться на x^3, и выдетъ сіе уравненіе $d+ex=2pq+qqx$, откуда найдется $x=\frac{d-2pq}{qq-e}$.

934.

Но легко видѣть можно, что по сему способу ничего не найдется, еже-

ли

ли втораго и третьяго члена вѣ формулѢ не будетѣ, или когда $b=0$ и $c=0$; ибо тогда $p=0$ и $q=0$ слѢдов. $\lambda=\frac{d}{e}$, но изѣ сего обыкновенно ничего новаго найти не льзя, а особливо когда и $d=0$, то получится $x=0$, которое знаменованїе ни мало не вспомоществуетѣ; по чему сей способѣ для такихѣ формулѣ, какова $ff+ex^4$ ни мало не служитѣ. Сїе самое обстоятельство бываетѣ также, когда $b=0$ и $d=0$, или когда втораго и четвертаго члена нѢтѣ; и формула имѢетѣ такой видѣ $ff+cxx+ex^4$, тогда будетѣ $p=c$, а $q=\frac{c}{2f}$. откуда найдется $x=0$, которое знаменованїе заразѣ видно и ни кѣ чему далѢе насѣ не ведетѣ.

935.

II разрѢшенїе формулы $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ggx^4)}$. Сїю формулу можнобы тотчасѣ привесть кѣ первому случаю полагая $x=\frac{1}{y}$; но понеже тогда сїя формула $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{yy}+\frac{d}{y^3}+\frac{gg}{y^4}$ должна быть квадратѣ, то помноживѣ на квадратѣ y^4 надлежалобы оной быти квадратомѣ:

и

и получится $ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg$, которая будучи написана наизворотъ, съ прежнею во всемъ сходствуетъ.

Но сїе не нужно: корень можно положить и такъ $gxx + px + q$, или наизворотъ $q + px + gxx$, будетъ $a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + 2gpx^3 + ggx^4$.
$+ ppxx$

Понеже здѣсь пятые члены сами чрезъ себя уничтожаются, то опредѣли сперва p такъ чтобъ и четвертые члены вонъ вышли; что учинится когда $d = 2gp$ или $p = \frac{d}{2g}$; потомъ опредѣлили еще q чтобъ и третїе члены уничтожились, что здѣлается полагая $c = 2gq + pp$, или $q = \frac{c - pp}{2g}$; по учиненїи же сего первые два члена даютъ сїе уравненїе $a + bx = qq + 2pqx$, откуда $x = \frac{a - qq}{2pq - b}$.

936.

Здѣсь опять попадается прежде реченной недостатокъ, когда втораго и

четвертаго

четвертаго члена нѣтъ, или когда $b=0$ и $d=0$: ибо выдетъ тогда $p=0$, а $q=\frac{c}{2g}$ откуда $x=\frac{a-qq}{0}$, которая величина есть безконечно большая и столь же мало служитъ какъ и $x=0$ въ первомъ случаѣ. И такъ сего способа при уравненїяхъ $a+cxx+gx^4$ употреблять не можно,

937.

III Разрѣшенїе формулы $\sqrt{}(ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4)$. Явно есть, что въ сей формулѣ оба прежнїе способа употребить можно; ибо первой членъ есть квадратъ, то положи корень $=f+px+qxx$, дабы первые 3 члена уничтожить; потомъ когда послѣдней членъ есть также квадратъ, то можно взять корень $=q+px+gxx$, чтобы изключить 3 послѣднїе члена, слѣдов. двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Но можно сїю формулу еще двумя другими способами разрѣшить, кои ей свойственны: по первому способу положи корень $=f+px+gxx$ и опредѣли p

такъ, чтобъ вторые члены уничтожились; понеже надлежитъ быть:

$$ff+bx+cxx+dx^3+ggx^4=ff+2fpx+2fgxx+ppxx+2gpx^3+ggx^4,$$

то возми $b=2fp$, или $p=\frac{b}{2f}$, и тогда не только первые два члена, но и послѣдніе уничтожаются; а остальные раздѣливъ на xx даютъ сіе уравненіе $c+dx=2fg+pp+2gpx$, откуда $x=\frac{c-2fg-pp}{2gp-d}$, или $x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$. Здѣсь особливо примѣчать надлежитъ, что въ формулѣ попадается только квадратъ gg, коего корень g какъ отрицательный, такъ и положительной взять можно, по чему другая еще величина вмѣсто x получится: а имянно $x=\frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}$, или $=\frac{pp-2fg-c}{2gp+d}$.

938.

Есть еще другой путь къ разрѣшенію сея формулы: а имянно положи корень какъ и прежде $f+px+gxx$, и опредѣли p такъ чтобъ четвертые члены уничто-

уничтожились , т. е. ежели положится вЪ прежнемЪ уравненіи $d = 2gp$, или $p = \frac{d}{2g}$, и понеже тогда первой членЪ сЪ двумя послѢдними уничтожается, а остальные раздѢливЪ на x даютЪ сіе простое уравненіе $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, откуда $x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c}$. При чемЪ надлежитЪ примѢчать , что вЪ сей формулѢ находится только квадратЪ ff , коего корень также и $-f$ взять можно , такЪ что будетЪ $x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c}$, по чему двѢ искомыя величины вмѢсто x найдутся, и слѢдовательно чрезЪ показанные до сихЪ мѢстЪ способы всѢхЪ навсе 6 новыхЪ величинЪ вывесть можно.

939.

Но здѢсь паки скучное обстоятельство случается , когда втораго и четвертаго члена нѢтЪ, или $b = 0$ и $d = 0$, то ни одной надлежащей величины вывесть не можно, и слѢдов. сея

формулы $ff+cxx+ggx^4$ разрѣшить чрезъ то не льзя; ибо когда $b=0$ и $d=0$ то изъ обѣихъ способовъ будетъ $p=0$ и по сему изъ перваго $x=\frac{e-2fg}{0}$ равно безконечному; а изъ другаго $x=0$, изъ коихъ далѣе ни чего найти не можно.

940.

Сїи суть 3 формулы въ которыхъ показанные до сихъ поръ способы употреблять можно, но ежели въ предложенной формулѣ ни первой ни послѣдней членъ не квадраты, то ни чего дѣлать, не льзя прежде нежели отгадана не будетъ такая вмѣсто x величина, при которой формула наша будетъ квадратъ.

Положимъ что формула наша будетъ квадратъ, когда положится $x=h$, такъ что $a+bh+chh+dh^3+eh^4=kk$, то возми только $x=h+y$, и получится новая формула, въ которой первой членъ kk квадратъ и такъ первой случай употребить можно. Сїе превращенїе употребляется такожде, когда уже въ предъидущихъ случаяхъ знаменованїе вмѣсто x,

x, какъ на прим. $x=b$, найдено; ибо тогда надлежитъ только поставить $x=b+y$, то получится новое уравненїе, къ которому прежнїе способы употребить можно; а изъ найденныхъ уже величинъ вмѣсто x другїе новые найдутся и съ сими новыми равнымъ образомъ поступать, и слѣдов. больше величинъ вмѣсто x находить можно.

941.

Особливо же примѣчать должно о часто напоминаемой формулѣ, гдѣ втораго и четвертаго члена не достаетъ, что ни какого рѣшенїя надѣяться не льзя, ежели одного, такъ сказать, не отгадано; а какъ въ такомъ случаѣ поступать, то покажетъ сїя формула $a+ex^4$, которая весьма часто попадается.

И по сему положи что уже величину $x=b$ нашли такъ, что будетъ $a+eb^4=kk$; а для нахожденїя другихъ возми $x=b+y$, то должна сїя формула быть квадратъ $a+eb^4+4eb^3y+6ebbyy+4eby^3$

 $+ey^4$

$+ey^4$, то есть $kk + 4eb^3y + 6ebbyy + 4eby^3 + ey^4$, которая надлежитъ до перваго способа; чего ради положи квадратной ея корень $= k + py + qyy$, и будетъ наша формула равна сему квадрату $kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$, гдѣ вопервыхъ p и q такъ опредѣлить должно, чтобъ второй и третей членъ уничтожились; для того должно быть $4eb^3 = 2kp$. слѣдов. $p = \frac{2eb^3}{k}$; $6ebb = 2kq + pp$; отсюда $q = \frac{6ebb - pp}{2k}$, или $q = \frac{3ebbkk - 2eeb^6}{k^3}$, или $q = \frac{ebb(3kk - 2eb^4)}{k^3}$, или понеже $eb^4 = kk - a$, будетъ $q = \frac{ebb(kk + 2a)}{k^3}$,

Потомъ слѣдующiе члены раздѣливъ на y^3 даютъ $4eb + ey = 2pq + qqy$, откуда найдется $y = \frac{4eb - 2pq}{qq - e}$. Числитель сея дроби получитъ такую формулу $\frac{4ebk^4 - 4eeb^6(kk + 2a)}{k^4}$, которая, понеже $eb^4 = kk - a$, превратится въ сiю

$\frac{4ebk^4 - 4eb(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, или $\frac{4eb(-akk+2aa)}{k^4}$, или $\frac{4aeb(2a-kk)}{k^4}$; а знаменатель $qq-e =$ $\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2 - ek6}{k6} = e\frac{(3ak^4 - 4a^3)}{k6} =$ $\frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k6}$; откуда искомая величина будетъ $y = \frac{4aeb(2a-kk).k^6}{k^4} \frac{}{ae(3k^4-4aa)}$, т. е. $y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$, слѣдов. $x = \frac{b(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa}$, или $x = \frac{b(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}$. Поставивъ сїю

величину вмѣсто x, формула наша $a+ex^4$, будетъ квадратъ, коего корень $k+py+qyy$ и которой въ сїю формулу обратится $k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}$ $+ \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k-4aa)^2}$; ибо изъ прежняго $p = \frac{2eb^3}{k}$; $q = \frac{ebb(kk+2a)}{k^3}$ и $y = \frac{4bkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$.

942.

Побудемъ еще при формулѣ $a+ex^4$, и когда извѣстной случай есть $a+eh^4=kk$, то можемъ мы его взять за два случая, потому что какъ $x=-h$, такъ $x=+h$; и для того можемъ мы сїю формулу превратить въ другую третьяго роду, въ которой первой и послѣдней членъ будутъ квадраты. Сїе учинится полагая $x=\frac{h(1+y)}{1-y}$, которой прїемъ намъ много вспомоществуетъ. И такъ формула наша будетъ $\frac{a(1-y)^4+eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$, или
$\frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^3+kky^4}{(1-y)^4}$,
сего возми квадратной корень по третьему случаю $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, такъ что числитель нашей формулы долженъ быть равенъ сему квадрату $kk+2kpy-2kkyy-2kpy^3+kky^4$ $+ppyy$ и здѣлай, чтобъ вторые члены уничтожились, что учинится полагая $4kk-8a=2kp$, или $p=\frac{2kk-4a}{k}$,

ос-

остальные же члены раздѣливъ на yy, даютъ $6kk + 4(kk-2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, или $y(4kk-8a+2kp) = pp-8kk$; но понеже $p = \frac{2kk-4a}{k}$, и $pk = 2kk-4a$, то $y(8kk-16a) = \frac{-4k^4-16akk+16aa}{kk}$; откуда $y = \frac{-k^4-4akk+4aa}{kk(2kk-4a)}$, а чтобъ найти отсюда x, то вопервыхъ $1+y = \frac{k^4-8ak+4aa}{kk(2kk-4a)}$, $1-y = \frac{3k^4-4aa}{kk(2kk-4a)}$, слѣдов. $\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}$: и такъ $x = \frac{k^4-8akk+4aa}{3k^4-4aa}.h$. Сїе тоже самое изъявленїе, которое мы нашли прежде.

943.

Для изъясненїя сего примѣромъ, пусть будетъ дана сїя формула $2x^4-1$, которая должна быть квадратъ. Здѣсь $a = -1$, $e = 2$ и извѣстной случай, въ которомъ сїя формула будетъ квадратъ есть когда $x = 1$, слѣдов. $h = 1$ и $kk = 1$,

т. е. $k=1$; отсюда получаемъ мы заразъ новую величину $x=\frac{1+8+4}{3-4}=-13$; но понеже числа x четвертая степень входитъ, то можно положить $x=+13$ по чему $2x^4-1=57121=(239)^2$.

Когдаже сей случай возмемъ за извѣстной, то будетъ $b=13$, $k=239$, откуда по прежнему новая вмѣсто x величина получится, а имянно $x=\frac{815730721+228488+4}{24471924163-4}$. $13=\frac{815959213}{2447192159}$. 13 слѣд. $x=\frac{10607469769}{2447192159}$.

944.

Подобнымъ образомъ разсмотримъ всеобщую формулу $a+cxx+ex^4$ и возмемъ за извѣстной случай, въ которомъ оная формула квадратъ, $x=b$, такъ что $a+cbb+eb^4=kk$; а для нахожденія другихъ возми $x=b+y$ и тогда формула наша получитъ такой видъ:

a

$$\begin{array}{l} a \\ cbb + 2cby + cyy \\ eb^4 + 4eb^3y + 6ebbyy + 4eby^3 + ey^4 \\ \hline kk + (2cb + 4eb^3)y + (c + 6ebb)yy + 4eby^3 + ey^4 \end{array}$$

гдѣ первой членъ есть квадратъ, коего корень положи $k + py + qyy$ такъ что наша формула равна сему квадрату $kk + 2kpy + \begin{matrix} 2kqyy \\ +ppyy \end{matrix} + 2pqy^3 + qqy^4$; теперь опредѣлили p и q такъ, чтобъ второй и четвертой членъ уничтожились, къ чему вопервыхъ требуется, чтобъ $2cb + 4eb^3 = 2kp$, или $p = \frac{cb + 2eb^3}{k}$, а потомъ $c + 6ebb = 2kq + pp$, или $q = \frac{c + 6ebb - pp}{2k}$, слѣдующіе же члены раздѣливъ на y^3 дають сіе уравненіе: $4eb + ey = 2pq + qqy$, откуда $y = \frac{4eb - 2pq}{qq - e}$; напослѣдокъ $x = b + y$, въ которомъ случаѣ квадратной корень нашей формулы будетъ $k + py + qyy$ и ежели сіе возмемъ за первоначальной извѣстной случай, то найдемъ изъ онаго паки новой, и такимъ образомъ продолжать можно сколько кто пожелаетъ.

945.

945.

Для изъясненія сего пусть данная формула будетъ $1 - xx + x^4$, гдѣ $a = 1$, $c = -1$, $e = 1$, и извѣстной случай заразъ виденъ· а имянно, $x = 1$, такъ что $h = 1$ и $k = 1$; положи теперь $x = 1 + y$, а квадратной корень нашей формулы $1 + py + qyy$, то будетъ сперва $p = 1$, а потомъ $q = 2$, откуда $y = 0$ и $x = 1$, которой уже случай извѣстенъ и слѣдов. новаго не найдено; но изъ другихъ основаній можно доказать, что сія формула квадратомъ не будетъ, кромѣ случаевъ $x = 0$ и $x = \pm 1$.

946.

Пусть будетъ еще сія формула дана $2 - 3xx + 2x^4$, гдѣ $a = 2$, $c = -3$ и $e = 2$ Извѣстной случай заразъ виденъ $x = 1$, и такъ пусть $h = 1$ будетъ $k = 1$; ежели же теперь положится $x = 1 + y$, а квадратной корень $1 + py + qyy$, будетъ $p = 1$; $q = 4$ и получится $y = 0$, откуда паки ничего новаго не найдется.

Другой

Другой примерѣ пусть будетѣ сія формула $1+8xx+x^4$, гдѣ $a=1$, $c=8$ и $e=1$; по маломѣ разсмотрѣніи найдется случай $x=2$, возми $b=2$ будетѣ $k=7$; положивѣ $x=2+y$, а корень $=7+py+qyy$, должно быть $p=\frac{32}{7}$, $q=\frac{272}{343}$; отсюда $y=-\frac{5880}{2911}$ и $x=\frac{-58}{2911}$, гдѣ знакѣ $-$ опустить можно. Вѣ семѣ примѣрѣ примѣчать надлежитѣ, что когда послѣдней членѣ самѣ по себѣ квадратѣ, то и вѣ новой формулѣ квадратомѣ останется, и корень можно также еще взять по прежнему третьему случаю.

По сему пусть будетѣ, какѣ и прежде $x=2+y$, то получимѣ

$$1$$
$$32+32y+8yy$$
$$16+32y+24yy+8y^3+y^4$$

$49+64y+32yy+8y^3+y^4$, что разными способами квадратомѣ быть можетѣ; ибо положи сперва корень $=7+py+yy$ такѣ, что наша формула равна будетѣ сему квадрату $49+14py+\genfrac{}{}{0pt}{}{14yy}{+ppyy}+2py^3+y^4$; теперь можно здѣлать, что послѣдніе

члены

члены пропадутъ, ежели положится $2p = 8$, или $p = 4$, а остальные раздѣливъ на y даютъ $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$; откуда $y = -4$, а $x = -2$, или $+2$, которой есть извѣстной случай. Когда же p возмется такъ, чтобъ вторые члены уничтожились, то будетъ $14p = 64$ и $p = \frac{32}{7}$; а оставшїеся члены раздѣливъ на yy даютъ $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, или $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$; отсюда $y = -\frac{71}{28}$, слѣдов. $x = -\frac{15}{28}$, или $+\frac{15}{28}$, которая величина дѣлаетъ формулу нашу квадратомъ, коего корень есть $\frac{1441}{784}$. Но $-yy$ есть также корень послѣдняго члена, то можно квадратной корень взять и такъ: $7 + py - yy$, или формула равна сему квадрату $49 + 14py - 14yy + ppyy - 2py^3 + y^4$, для исключенїя предпослѣдняго члена положи $8 = -2p$, или $p = -4$, а остальные члены раздѣливъ на y даютъ $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, откуда $y = -4$, какъ и прежде.

Естьли же вторые члены уничтожатся, то будетъ $64 = 14p$ и $p = \frac{32}{7}$ а

остав-

оставшїеся раздѣливъ на yy даютъ $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, или $32 + 8y = \frac{330}{49} = -\frac{64}{7} y$, слѣдов. $y = -\frac{71}{28}$ и, $x = \frac{15}{28}$, тоже что и прежде.

947.

Такимъ же образомъ поступать можно со всеобщею формулою $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$, когда случай $x = b$ извѣстенъ, и оная будетъ квадратъ т. е. kk; ибо тогда возми $x = b + y$, и получится формула въ столькихъ же членахъ, изъ коихъ первой kk; положи теперь корень ея $k + py + qyy$ и опредѣли p и q такъ, чтобъ вторые и третьи члены уничтожились, а остальные раздѣливъ на y^3 дадутъ простое уравненїе, откуда y и слѣдов. x опредѣлить можно.

Но здѣсь отметаются только тѣ случаи, гдѣ новонайденное знаменованїе числа x съ извѣстнымъ $x = b$ одинаково; ибо тогда ничего новаго найти не льзя. Въ такихъ случаяхъ формула или сама по себѣ не возможна, или должно угадать

дать другой случай, гдѣ она будетъ квадратъ

948.

Въ рѣшеніи квадратныхъ коренныхъ знаковъ дошли мы до сего мѣста; только когда вышшая степень не превышаетъ 4 той. Естьли же въ такой формулѣ 5 тая, или еще большая степень случится, то употребляемыхъ по сіе мѣсто пріемовъ не довольно дать ей рѣшеніе, хотя бы уже одинъ случай и былъ извѣстенъ; а что бы сіе показать яснѣе, то разсмотримъ теперь формулу $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, гдѣ первой членъ уже квадратъ, и когда бы мы захотѣли положить корень какъ и прежде $k + px + qxx$, а p и q опредѣлить такъ, чтобы вторые члены уничтожились, то останутся еще 3, кои раздѣливъ на x^3 даютъ квадратное уравненіе, почему должнобы было опредѣлить x новымъ креннымъ знакомъ. Естьли же бы положили корень $k + px + qxx + rx^3$, то былабы уже въ квадратѣ 6 тая степень

и три

и три буквы p, q и r надлежало бы такъ опредѣлить чтобъ вторые, третьи и четвертые члены уничтожились, то останутся еще 4 тая, 5 тая и 6 тая степень, которые раздѣливъ на x^4 опять ведутъ къ квадратному уравненію, и слѣдов. x безъ кореннаго знака опредѣлить не можно; чего ради принуждены мы оставить такіе формулы, кои квадратами быть должны и приступимъ къ кубичнымъ коореннымъ знакамъ.

ГЛАВА X.

О способѣ формулу $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ здѣлать раціональною.

949.

Здѣсь требуются такіе величины вмѣсто x, чтобъ формула $a+bx+cxx+dx^3$ была кубичное число; и слѣдовательно можно бы было изъ оной извлечь кубичной корень. При семъ упомянуть надлежитъ, что сія формула 3 тью сте-

пень превышать не должна; потому что въ противномъ случаѣ рѣшить ее не льзя бы было. Когда же формула до второй только степени возходитъ и членъ бы dx^3 уничтожился то бы рѣшенїе сїе не легче было; но ежели послѣднїе два члена уничтожатся, такъ чтобъ формулу $a+bx$ кубомъ здѣлать надлежало, то бы дѣло ни какой трудности не имѣло; ибо должно бы только положить $a+bx=p^3$, а оттуда заразъ найдется $x=\frac{p^3-a}{b}$.

950.

Здѣсь опять прежде всего примѣчать надлежитъ, что ежели ни первой ни послѣдней членъ не кубы, то ни о какомъ рѣшенїи помышлять не льзя, когда случая не будетъ извѣстно, въ которомъ формула будетъ кубъ. Оной или самъ собою виденъ будетъ, или чрезъ пробу найдется.

Первое дѣлается, когда первой членъ кубъ и формула будетъ $f^3+bx+cxx+dx^3$

$+dx^5$, гдѣ извѣстной случай $x=0$; потомъ также ежели послѣдней членъ кубъ и формула такого состоянія $a+bx+cxx+g^3x^3$. Изъ сихъ обоихъ случаевъ раждается третей, гдѣ какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, которые три случая теперь мы разсмотримъ.

951.

Пусть предложенная формула будетъ $f^3+bx+cxx+dx^3$, которую кубомъ здѣлать надлежитъ.

Положи корень ея $f+px$, такъ чтобъ наша формула была равна сему кубу $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$, гдѣ первые члены сами собою уничтожаются; опредѣли p такъ чтобъ и вторые исключить, что учинится когда $b=3ffp$, или $p=\frac{b}{3ff}$; потомъ остальные члены раздѣливъ на xx даютъ сіе уравненіе $c+dx=3fpp+p^3x$, откуда $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$; когда же бы послѣдняго члена dx^3 не было, то можно

бы просто положить кубичной корень $=f$, и тогда бы нашлось $f^3=f^3+bx+cxx$, или $b+cx=0$, слѣдов. $x=\frac{-b}{c}$; но изъ сего далѣе ничего заключить не льзя.

952.

Предложенная формула пусть будетъ во вторыхъ имѣть такой видъ: $a+bx+cxx+g^3x^3$, коей кубичной корень возми $p+gx$, котораго кубъ $p^3+3gppx+3ggpxx+g^3x^3$: понеже здѣсь послѣдніе члены уничтожаются, то опредѣли p такъ, чтобъ и предпослѣдніе вонъ вышли, что здѣлается когда $c=3ggp$, или $p=\frac{c}{3gg}$, а первые два даютъ сіе уравненіе: $a+bx=p^3+3gppx$, откуда $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$. Ежелибы перваго члена a не было, то можно бы кубичной корень просто взять $=gx$, и тогда бы $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$, или $0=b+cx$, слѣдов $x=\frac{-b}{c}$; но сіе ни къ чему далѣе не служитъ.

953.

953.

Пусть наконецЪ данная формула будетЪ $f^3+bx+cxx+g^3x^3$, вЪ которой какЪ первой такЪ и послѣдней членЪ кубы; чего ради оную по обоимЪ предъидущимЪ способамЪ рѣшить можно, и слѣдов двѣ величины вмѣсто x найдутся.

СверьхЪ сего можно также еще положить корень $f+gx$, такЪ что наша формула равна кубу $f^3+3ffgx+3fggxx+g^3x^3$, гдѣ первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливЪ на x даютЪ сіе уравненіе: $b+cx=3ffg+3fggx$, отсюда $x=\frac{b-3ffg}{3fgg-c}$.

954.

Когда же данная формула не будетЪ надлежать ни до одного изЪ сихЪ 3 способовЪ, то дѣлать больше нечего, какЪ только отгадать величину, которая бы была кубЪ, и ежели такая найдется на прим. $x=h$, такЪ что $a+bh+chh+dh^3=k^3$, то возми $x=h+y$, и наша формула получитЪ такой видЪ.

a
$bb + by$
$cbb + 2cby + cyy$
$db^3 + 3dbby + 3dbyy + dy^3$

$k^3 + (b + 2cb + 3dbb)y + (c + 3db)yy + dy^3$, которая надлежитъ до перваго способа, и слѣдов. величину для y найти можно; а отщуда получится новое знаменованіе вмѣсто x, изъ котораго послѣ такимъ же образомъ еще и больше найти можно.

955.

Сей способъ намѣрены мы изъяснить нѣкоторыми примѣрами и возмемъ во первыхъ сію формулу $1 + x + xx$, которая должна быть кубъ, да притомъ и надлежитъ до перваго способа; по чему можно бы заразъ положить кубичной корень $= 1$, откуда найдется $x + xx = 0$ т. е. $x(1 + x) = 0$, слѣдов. или $x = 0$, или $x = -1$, но изъ сего далѣе ни чего не слѣдуетъ. Сего ради возми кубичной корень $1 + px$, коего кубъ есть $1 + 3px$ $+ 3ppxx$

$+ 3ppxx + p^3x^3$, и положи $1 = 3p$, или $p = \frac{1}{3}$, и оставшіеся члены раздѣливъ на xx даютъ $1 = 3pp + p^3x$, или $x = \frac{1-3pp}{p^3}$, но $p = \frac{1}{3}$, найдется $x = \frac{1-\frac{3}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$. И по сему формула наша $1 + 18 + 324 = 343$, изъ чего кубичной корень $1 + px = 7$. Ежели бы захотѣли положить еще $x = 18 + y$, то получила бы наша формула такой видъ; $343 + 37y + yy$, откуда по первому правилу кубичной корень надлежало бы положить $7 + py$, коего кубъ $343 + 147py + 21ppyy + p^3y^3$; положи $37 = 147p$, или $p = \frac{37}{147}$, а остальные члены даютъ сіе уравненіе; $1 = 21pp + p^3y$, слѣдов. $y = \frac{1-21pp}{p^3}$ т. е. $y = \frac{-340.21.147}{37^3} = -\frac{1049580}{50653}$, откуда еще новыя величины находить можно.

956.

Пусть дана будетъ сія формула $2 + xx$, которая должна быть кубъ. Здѣсь прежде всего надлежитъ отгадать

случай, въ которомъ сїе дѣлается, какой есть $x = 5$; и такъ положи $x = 5 + y$ и получится $27 + 10y + yy$; изъ сего пусть будетъ кубичной корень $3 + py$, и слѣдов. самая формула равна сему кубу, $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$, возми $10 = 27p$, или $p = \frac{10}{27}$, и получится $1 = 9pp + p^3y$ откуда $y = \frac{1 - 9pp}{p^3}$ т. е. $y = -\frac{19.9.27}{1000}$, или $y = -\frac{4617}{1000}$, а $x = \frac{383}{1000}$; по сему наша формула $2 + xx = \frac{2146689}{1000000}$, откуда кубичной корень $3 + py = \frac{129}{100}$.

957.

Разсмотримъ еще сїю формулу $1 + x^6$, можетъ ли оная быть кубомъ сверьхъ двухъ очевидныхъ случаевъ $x = 0$ и $x = -1$. Хотя сїя формула и надлежитъ до третьяго случая, однакожъ корень $1 + x$ намъ ни чего не помогаетъ, потому что его кубъ $1 + 3x + 3xx + x^3$ положивъ равнымъ нашей формулѣ даетъ $3x + 3xx = 0$, или $x(1 + x) = 0$, т. е. или $x = 0$, или $x = -1$.

Естьли

Естьли же положимъ $x = -1 + y$, то получится сія формула $3y - 3yy + y^3$, которая должна быть кубъ, и надлежитъ до втораго случая. Положивъ кубичной корень $p + y$, коего кубъ $p^3 + 3ppy + 3pyy + y^3$, возмешъ $-3 = 3p$, или $p = -1$, то остальные члены дадутъ $3y = p^3 + 3ppy = -1 + 3y$, слѣдов. $y = \frac{1}{0}$ т. е. безконечной, откуда слѣдовательно ни чего не найдется. Тщетной будетъ трудъ искать еще другія для x величины: ибо изъ другихъ основаній доказать можно, что формула $1 + x^3$ кромѣ помянутыхъ случаевъ ни когда кубомъ не будетъ. Понеже показано, что сумма двухъ кубовъ какъ $t^3 + x^3$ никогда кубомъ быть не можетъ, по сему также не возможно когда $t = 1$.

958.

Утверждаютъ также что $2 + x^3$ кубомъ быть не можетъ, выключая случай $x = -1$. Сія формула хотя и надлежитъ до втораго случая, но по показанному тамъ правилу вывесть ничего не льзя,

потому что среднихъ членовъ недостаетъ. Ежели же положишъ $x = -1 + y$, то получится сія формула $1 + 3y - 3yy + y^3$, которую по всѣмъ тремъ случаямъ рѣшить можно. Взявъ по первому корень $1 + y$, коего кубъ $1 + 3y + 3yy + y^3$, будетъ $-3yy = 3yy$, или $y = 0$, что только дѣлается когда $y = 0$. Положи по второму случаю корень $-1 + y$, коего кубъ $-1 + 3y - 3yy + y^3$, и будетъ $1 + 3y = -1 + 3y$ и $y = \frac{2}{0}$ безконечной. По третьему способу должно бы было взять корень $= 1 + y$, что уже прежде было.

959.

Пусть будетъ дана сія формула $3 + 3x^3$, которая должна быть кубъ. Сіе учинится только въ случаѣ $x = -1$, но отсюда ничего заключить не льзя; потомъ также въ случаѣ $x = 2$, для того положи $x = 2 + y$, и выдетъ сія формула $8 + 12y + 6yy + y^3$, или $27 + 36y + 18yy + 3y^3$, которая надлежитъ до перваго случая, и по сему возми корень

$= 3$

$=3+py$, коего кубъ $27+27py+9ppyy+p^3y^3$, положи $36=27p$; или $p=\frac{4}{3}$, а остальные члены разделивъ на yy даютъ $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$ или, $\frac{17}{27}y=-2$, откуда $y=-\frac{54}{17}$ слѣдов. $x=-\frac{20}{17}$; по чему формула наша $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$; коей кубичной корень есть $3+py=\frac{21}{17}$: изъ сего знаменованія можно бы было еще болѣе найти, естьли бы только захотѣли.

960.

Разсмотримъ еще наконецъ формулу $4+xx$, которая въ двухъ извѣстныхъ случаяхъ будетъ кубъ; а имянно когда $x=2$ и $x=11$, взявъ сперва $x=2+y$, формула сія $8+4y+yy$ будетъ кубъ, коего корень пусть будетъ $2+\frac{1}{3}y$, а кубъ $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, откуда $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$ слѣдов. $y=9$, а $x=11$, другой извѣстной случай. Положивъ потомъ $x=11+y$ получится $125+22y+yy=$ кубу изъ $5+py$ т. е. $125+75py+15ppyy+p^3y^3$; взявъ $p=\frac{22}{75}$ будетъ $1=15pp+p^3y$ или $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$, откуда $y=-\frac{122625}{10648}$, слѣдов. $x=\frac{-5497}{10648}$.

По-

Понеже x какъ положительной такъ и отрицательной быть можетъ, то возми $x = \frac{2+2y}{1-y}$, формула наша будетъ $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, которая должна быть кубъ помножь въ в рьху и въ низу на $1-y$, чтобъ знаменатель былъ кубъ, и получится $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, гдѣ числителя только $8-8y+8yy-8y^3$, или раздѣливъ на 8 т. е. $1-y+yy-y^3$ кубомъ здѣлать должно которая формула до всѣхъ трехъ способовъ принадлежитъ. Положи по первому корень $=1-\frac{1}{3}y$, коего кубъ $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$, будетъ $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, или $27-27y=9-y$, откуда $y=\frac{9}{13}$, слѣдов. $1+y=\frac{22}{13}$ и $1-y=\frac{4}{13}$, слѣдов. $x=11$ какъ и прежде; по второму способу положивъ корень $\frac{1}{3}-y$ тоже самое найдется.

По третьему взявъ, корень $1-y$, коего кубъ $1-3y+3y^2-y^3$, получится $-1+y=-3+3y$, откуда $y=1$, слѣдов. $x=\frac{4}{0}$ безконечной, и такъ

по сему способу ничего новаго не найдется.

961.

Зная уже сіи два случая $x=2$ и $x=11$ можно положить $x=\frac{2+11y}{1\pm y}$, и когда $y=0$, будетъ $x=2$; но ежели y безконечной, то $x=\pm 11$; и по сему пусть во первыхъ $x=\frac{2+11y}{1+y}$ будетъ наша формула $4+\frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy}$, или $\frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2}$; помножь въ верьху и въ низу на $1+y$, чтобъ знаменатель былъ кубъ, а зделать бы только числителя, которой будетъ $8+60y+177yy+125y^3$, кубомъ.

И такъ положивъ корень $=2+5y$, чрезъ что не только 2 первые члена, но и последніе уничтожатся, и следов. ничего не найдется.

Положи по второму способу корень $=p+5y$, коего кубъ $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$

$+125.^3$, и возми $177=75p$, или $p=\frac{59}{25}$, будетъ $8+60v=p^3+15ppy$, откуда $-\frac{2943}{125}$ $y=\frac{80379}{15625}$ и $y=\frac{80379}{367875}$, и отсюда можно бы было найти x.

Естьли же бы положили корень по 3 ему способу $2+5y$, то бы оттуда ничего не вышло; но можно также положить $x=\frac{2+11y}{1-y}$, и тогда будетъ наша формула $4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$ коей числителя помноживъ на $1-y$ выдетъ. $8+28y+89yy-125y^3$.

Ежели теперь положимъ по первому способу корень $=2+\frac{7}{3}y$, коего кубъ $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^3$, то выдетъ $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, или $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$ слѣдов. $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$, почему $x=11$, что уже извѣстно.

Возми еще по третьему способу корень $2-5y$, коего кубъ $8-60y+150yy-125y^3$, откуда найдется $28+89y=-60+150y$ слѣдов. $y=\frac{88}{61}$, а отсюда $x=-\frac{1090}{27}$ по чему формула наша будетъ $\frac{1191016}{729}$, кубъ числа $\frac{106}{9}$.

962.

Сіи то суть извѣстные способы, помощію каторыхъ формулу, или квадратомъ или кубомъ здѣлать можно, когда только во первомъ случаѣ вышшая степень не опредѣленнаго числа не превышаетъ второй, а въ послѣднемъ третьей степени.

Можно бы еще случай присоединить, когда предложенную формулу биквадратомъ здѣлать надлежитъ, въ которомъ вышшая степень второй не превышаетъ; такъ когда формула $a+bx+cxx$ должна быть биквадратъ, то прежде всего надлежитъ онюю здѣлать квадратомъ, а потомъ корень сего квадрата еще квадратомъ; о чемъ уже правила показаны.

Такъ когда наприм. $xx+7$, должно быть биквадратъ, то здѣлай прежде сію формулу квадратомъ, что учинится положивъ $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$, или $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$, и формула наша равна сему квадрату

$$\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq};$$

откуда корень $\frac{7pp+qq}{2pq}$, которой еще квадратомъ здѣлать должно. На сей конецъ помножь въ верьху и въ низу на $2pq$, чтобъ знаменатель былъ квадратъ; а числитель $2pq(7pp+qq)$ долженъ быть также квадратъ, чего иначе учинить не льзя, какъ отгадать только случай: сего ради можно взять $q=pz$, чтобъ сія формула $2ppz(7p^2+p^2z^2)=2p^4z(7+zz)$, и раздѣливъ на p^4, т. е. $2z(7+zz)$ была квадратъ; здѣсь извѣстной случай $z=1$; и такъ положивъ $z=1+y$ получишь $(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3$, оттуда корень пусть будетъ $4+\frac{5}{2}y$, котораго квадратъ $16+20y+\frac{25}{4}yy$ положивъ равнымъ формулѣ нашей получится $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$ и $z=\frac{9}{8}$, но $z=\frac{q}{p}$ будетъ $q=9$ и $p=8$ по сему $x=\frac{367}{144}$, слѣдов. формула наша $7+xx=\frac{279841}{20736}$, коей квадратной корень есть $\frac{529}{144}$, а сего еще квадратной корень есть $\frac{23}{12}$, котораго наша формула биквадратъ.

963.

Наконецъ въ сей главѣ упомянуть надлежитъ, что есть нѣкоторые формулы, кои вообще кубомъ здѣлать можно; такъ когда cxx должно быть кубичное число, то положи его корень $=px$, будетъ $cxx=p^3x^3$, или $c=p^3x$, слѣдов. $x=\frac{c}{p^3}$, возми $\frac{1}{q}$ вмѣсто p, получится $x=cq^3$. Притчина сему видна; потому что формула содержитъ въ себѣ квадратъ, чего ради всѣ такіе формулы $a(b+cx)^2$, или $abb+2abcx+accxx$ весьма легко кубомъ здѣлать можно: ибо положивъ кубичной ея корень $=\frac{b+cx}{q}$ будетъ $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$ и раздѣливъ на $(b+cx)^2$ получится $a=\frac{b+cx}{q^3}$, откуда $x=\frac{aq^3-b}{c}$, гдѣ q по изволенію брать можно.

Отсюда явствуетъ, сколь велика польза разрѣшать формулу на ея множителей, когда только сіе учинить можно

о которой матеріи намѣрены мы говорить пространнѣе въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи на множителей формули $axx + bxy + cyy$.

964.

Здѣсь буквы x и y значатъ цѣлыя только числа: мы уже видѣли въ какихъ случаяхъ дробями довольствоваться должно, и какимъ образомъ приводится вопросъ въ цѣлыя числа. Когда наприм. искомое число x будетъ дробь, то надлежитъ только взять $x = \frac{t}{u}$ и тогда вмѣсто t и u завсегда можно брать цѣлыя числа; и понеже сія дробь въ самомъ меньшемъ видѣ изъявлена быть можетъ, то обѣ буквы t и u за такія числа почесть можно, кои общаго дѣлителя не имѣютъ.

Въ предложенной формулѣ x и y значатъ цѣлыя только числа, и прежде

нежели

нежели можемъ мы показать; какимъ образомъ оную квадратомъ, или кубомъ, или другою вышшею степенью здѣлать можно, надлежитъ напередъ разсмотрѣть какія знаменованія буквамъ x и y дать должно, чтобъ формула содержала въ себѣ два или больше множителей.

965.

Здѣсь 3 случая входятъ въ разсужденіе: *первой* когда сія формула дѣйствительно на 2 раціональные множителя разрѣшиться можетъ; что учинится; какъ уже мы и прежде видѣли, когда $bb-4ac$ будетъ квадратное число.

Другой случай когда оба сіи множителя равны между собою, въ которомъ сама формула дѣйствительной квадратъ содержитъ.

Третей случай когда формула не иначе какъ на ирраціоналные множители раздроблена быть можетъ, хотя оні или просто ирраціональные, или совсѣмъ не-

возможные будутъ. Первое учинится, когда $bb-4ac$ есть положительное число, но не квадратъ; а послѣднее, ежели $bb-4ac$ будетъ отрицательное: сiи то суть 3 случая, кои мы разсмотрѣть имѣетъ.

966.

Ежели формула наша на два рацiональные множителя разрѣшится, то можно ее представить такъ: $(fx+gy)(hx+ky)$, которая уже по своему свойству заключаетъ въ себѣ двухъ множителей. А когда за благо разсудится, чтобъ она большее число множителей въ себѣ заключала, то возми только $fx+gy=pq$ и $hx+ky=rs$, и тогда наша формула равна сему произведенiю $pqrs$, слѣдов. 4 множителей въ себѣ содержитъ, коихъ число по произволенiю увеличить можно, а изъ сего получаемъ мы двоякое знаменованiе вмѣсто x, а имянно: $x=\frac{pq-gy}{f}$ и $x=\frac{rs-ky}{h}$, почему будетъ $hpq-hgy=frs-fky$, слѣдов. $y=\frac{frs-hpq}{fk-hg}$

и

и $x = \frac{kpq - grs}{fk - bg}$. Для изъявленія буквъ x и y, въ цѣлыхъ числахъ надлежитъ взять p, q, r и s такъ, чтобъ числитель дѣйствительно могъ раздѣлиться на знаменателя, что учинится ежели или p и r, или q и s на него раздѣлятся.

967.

Для изъясненія сего, пусть предложена будетъ формула $xx - yy$, которая состоитъ изъ сихъ множителей $(x+y)(x-y)$, а ежели она еще больше множителей имѣть долженствуетъ, то положи $x+y = pq$; $x-y = rs$ и получится $x = \frac{pq + rs}{2}$, $y = \frac{pq - rs}{2}$; но что бы сіи числа были цѣлыя, то должны оба числа pq и rs быть вдругъ или четныя, или оба нечетныя.

Пусть наприм. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ и $s = 1$, будетъ $pq = 35$ и $rs = 3$, слѣд. $x = 19$ и $y = 16$, откуда найдется $xx - yy = 105$, которое число дѣйствительно

состоитъ изъ множителей 7, 5, 3, 1, и такъ сей случай не имѣетъ ни малѣйшаго затрудненія.

968.

Еще меньше трудности имѣетъ другой случай, гдѣ формула два равные множителя въ себѣ заключаетъ, и по сему такъ представлена быть можетъ: $(fx+gy)^2$, которой квадратъ никакихъ другихъ множителей имѣть не можетъ, кромѣ тѣхъ, кои изъ его корня $fx+gy$ раждаются. И такъ положивъ $fx+gy=pqr$, будетъ формула наша $ppqqrr$, и слѣдов. столько множителей имѣть можетъ, сколько за благо разсудится.

Здѣсь изъ двухъ чиселъ x и y одно только опредѣляется, а другое оставляется на наше произволеніе; и когда получится $x=\frac{pqr-gy}{f}$, гдѣ y легко можно взять такъ, что дробь уничтожится. Наилегчайшая сего роду формула есть xx, ежели возмется $x=pqr$, то квадратъ xx заключаетъ въ себѣ три

квад-

квадратные множителя, а имянно: pp, qq и rr.

969.

Гораздо больше имѣетъ трудности третей случай, гдѣ формула наша на 2 раціональныя множителя разрѣшиться не можетъ, и требуется къ сему особливое искуство находить вмѣсто x и y такія знаменованія, изъ которыхъ бы формула 2, или больше множителей въ себѣ содержала. А что бы облегчить сіе разысканіе, то должно примѣчать, что наша формула легко перемѣниться можетъ въ другую, гдѣ средняго члена нѣтъ; а имянно надлежитъ только взять $x = \frac{z-by}{2a}$, и получится сія формула $\frac{zz-2byz+bbyy}{4a} + \frac{byz-bbyy}{2a} + cyy = \frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}$; опустимъ теперь средней членъ и разсмотримъ формулу $axx+cyy$, гдѣ все дѣло въ томъ состоитъ, какія бы знаменованія буквамъ x и y дать должно, что бы сія формула множителей имѣла. Легко усмотрѣть можно, что сіе отъ

свойства чиселъ a и c зависитъ, и для того начнемъ съ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ сего рода формулъ.

970.

Пусть во первыхъ дана будетъ формула $xx+yy$, которая всѣ числа въ себѣ содержитъ, кои суммы двухъ квадратовъ изъявляютъ, и представимъ здѣсь самыя меншія до 50.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. между коими находятся нѣкоторыя первыя числа, кои ни какихъ множителей не имѣютъ; по сему вопросъ будетъ яснѣе, какія знаменованія буквамъ x и y дать должно, чтобъ формула $xx+yy$ дѣлителей или множителей въ себѣ имѣла; да притомъ столько, сколько за благо разсудится. При чемъ прежде всего изключаемъ мы тѣ случаи, гдѣ x и y общаго дѣлителя имѣютъ, потому что тогда $xx+yy$ на онаго дѣлителя и на квадратъ его могло бы раздѣлиться; ибо когда наприм.

$x=7p$

$x=7p$ и $y=7q$, то сумма ихъ квадратовъ $=49pp+49qq=49(pp+qq)$ можетъ на 49 раздѣлиться; и такъ надлежитъ вопросъ до такихъ формулъ, гдѣ x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, или между собою недѣлимы. Затрудненіе здѣсь заразъ попадается; ибо хотя и видно что оба числа x и y нечетныя, однакожъ формула $xx+yy$ четное число будетъ и слѣд. на 2 дѣлимо; но ежели одно четное, а другое нечетное, то формула будетъ нечетъ: а имѣетъ ли она дѣлителей или нѣтъ, то не скоро узнать можно. Оба же числа x и y четныя быть не могутъ, потому что они не должны имѣть общаго дѣлителя.

971.

По сему пусть будутъ оба числа x и y между собою недѣлимыя, и хотя формула $xx+yy$ должна въ себѣ заключать 2 или больше множителей, однакожъ въ такомъ случаѣ прежній способъ имѣть мѣста не можетъ; потому что сія

формула на 2 раціональные множителя разрѣшиться не можетъ. Но ирраціональные множители, на которые формула раздробляется, и изъявляется чрезъ произведеніе $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, могутъ намъ туже показать услугу; ибо когда формула $xx+yy$ дѣйствительно множителей имѣетъ, то сіи ирраціональные множители должны паки имѣть множителей. Когда же бы сіи множители дѣлителей далѣе не имѣли, тобы и произведеніе оныхъ также ни какихъ множителей не имѣло. Но когда сіи множители суть ирраціональные, да и совсемъ невозможные, то числа x и y равнымъ образомъ общаго дѣлителя имѣть не должны, и слѣдов. не могутъ они имѣть ни какихъ раціональныхъ множителей, а будутъ ирраціональными, или совсемъ невозможными.

972.

И такъ когда потребуется, чтобъ формула $xx+yy$ состояла изъ двухъ раціональныхъ множителей, то оба ирраці-

раціональные множители раздроби паки на два множителя и положи во первыхъ $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$; а понеже $\sqrt{-1}$, какъ положительной такъ и отрицательной взять можно, то само собою будетъ $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, и произведеніе оттуда дастъ нашу формулу, т. е. $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ такъ что она два раціональные множителя имѣетъ, т. е. $pp+qq$ и $rr+ss$. Но здѣсь осталось еще опредѣлить знаменованія чиселъ x и y, которыя также раціональныя быть должны.

Помноживъ неизвлекомыхъ множителей между собою выдетъ $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$ и $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$, сложивъ сіи формулы, будетъ $x=pr-qs$; когдаже вычтешь одну изъ другой, то получится $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, или $y=ps+qr$. По сему взявъ $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$ формула наша $xx+yy$ заподлинно имѣть будетъ двухъ множителей и выдетъ $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$.

Но

Но ежели потребуется большее число множителей, то должно только взять p и q такЪ чтобЪ $pp+qq$ имѢло двухЪ множителей, и тогда бы нашлось 3 множителя, коихЪ число по произволенію увеличить можно.

973.

Понеже здѢсь квадраты только чиселЪ p, q, r и s входятЪ, то можно сіи взять также и отрицательными: возми наприм. q отрицательное, будетЪ $x=pr+qs$ и $y=ps-qr$, коихЪ сумма квадратовЪ та же самая, какЪ и прежде. Отсюда усматриваемЪ мы, что ежели число произведенію $(pp+qq)(rr+ss)$ равно, то оное двоякимЪ образомЪ на два квадрата раздроблено быть можетЪ; ибо сперва найдено $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$; а потомЪ $x=pr+qs$ и $y=ps-qr$. Пусть наприм. $p=2$, $q=3$, $r=2$ и $s=1$, такЪ что бы сіе произведеніе вышло $13.5=65=xx+yy$, то будетЪ тогда или $x=4$, а $y=7$, или $x=8$ а $y=1-$, и вЪ обоихЪ

ихъ случаяхъ $xx+yy=65$. Когда много такихъ чиселъ помножишь между собою, то произведенiе еще больше разъ будетъ изъявлять сумму двухъ квадратныхъ чиселъ различными образами. Умножь наприм. $2^2+1^2=5$; $3^2+2^2=13$ и $4^2+1^2=17$ между собою, и выдетъ 1105, которое число на два квадрата раздроблено будетъ слѣдующимъ образомъ:

I) 33^2+4^2; II) 32^2+9^2; III) 31^2+12^2; IV) 24^2+23^2.

974.

Между содержащимися въ формулѣ $xx+yy$ числами находятся такiя, кои изъ двухъ или больше такихъ чиселъ по умноженiю составлены, а потомъ и такiе кои такъ не составлены. Сiи называть станемъ простыми числами, а тѣ сложенными: и такъ простыя числа въ формулѣ $xx+yy$ будутъ слѣдующiя: 1, 2. 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, и протч. въ которомъ ряду двоякiя числа попадаются, а имянно: первыя числа, или такiя кои дѣлителей не имѣютъ какъ 2,

5,

5, 13, 17, 29, 37, 41; которыя всѣ кромѣ 2 такого состоянія, что отнявъ отъ нихъ 1цу, остатокъ на 4 раздѣлится; или они содержатся въ формулѣ $4n+1$: Потомъ попадаются квадратныя числа, яко 9, 49, коихъ корни 3 и 7 не находится. При чемъ примѣчать надлежитъ, что сіи корни 3 и 7 въ формулѣ $4n-1$ содержатся: но очевидно, что ни одно число изъ сей формулы $4n-1$ не можетъ быть суммою двухъ квадратовъ: ибо когда сіи числа нечетныя, то должно одному изъ обоихъ квадратовъ быть четному, а другому нечетному. Но мы видѣли, что всѣ четныя квадраты на 4 дѣлятся, а нечетныя въ формулѣ $4n+1$ содержатся; и такъ ежели четной квадратъ съ нечетнымъ сложится, то сумма получаетъ завсегда формулу $4n+1$, а никогда $4n-1$. что же всѣ первыя числа формулы $4n+1$ суть суммы двухъ квадратовъ, то хотя и извѣстно, но доказать не столь легко можно.

975.

Поступимъ далѣе и разсмотримъ формулу $xx + 2yy$, дабы увидѣть, какія знаменованія x и y имѣть должны, чтобъ найти ея множителей. Понеже сія формула въ мнимыхъ множителяхъ представляется такъ $(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})$, то разумѣется, какъ и прежде, ежели формула наша имѣетъ множителей, то и сія мнимая формула должна имѣть своихъ. Для того положи во первыхъ $x + y\sqrt{-2} = (p + q\sqrt{-2})(r + s\sqrt{-2})$, то видно, что $x - y\sqrt{-2} = (p - q\sqrt{-2})(r - s\sqrt{-2})$; по чему наша формула будетъ $xx + 2yy = (pp + 2qq)(rr + ss)$, и слѣдовательно двухъ множителей имѣетъ, изъ коихъ притомъ каждой того же роду. Для учиненія сего надлежитъ опредѣлить надлежащія знаменованія вмѣсто x и y, что здѣлается слѣдующимъ образомъ: понеже $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$, а $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, то сумма дастъ $2x = 2pr - 4qs$, слѣдов. $x = pr - 2qs$, а разность $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$

$+2ps\sqrt{-2}$, откуда $y=qr+ps$. И такъ когда наша формула $xx+2yy$ должна имѣть множителей, то оныя бываютъ завсегда такого свойства, что одинъ изъ нихъ $pp+2qq$; а другой $rr+2ss$, или они оба суть числа одного роду съ $xx+2yy$. Для сей причины можно x и y двоякимъ образомъ опредѣлить, потому что q какъ положительное, такъ и отрицательное взять можно, и найдется $x=pr-2qs$ и $y=ps+qr$; а потомъ $x=pr+2qs$ и $y=ps-qr$.

976.

Сія формула $xx+2yy$ заключаетъ въ себѣ всѣ тѣ числа, которыя изъ одинакого и удвоеннаго квадрата состоятъ, и кои мы здѣсь до 50 предлагаемъ:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 38, 41, 43, 44, 49, 50. и которыя какъ и прежде, на простыя и составныя раздѣлить можно; простыя, кои изъ предъидущихъ не составлены суть слѣдующія: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43,

43, 49, между которыми всѣ; кромѣ квадратовъ 25 и 49 суть первыя числа; а которыхъ здѣсь нѣтъ, оныхъ попадаются квадраты: Здѣсь надлежитъ также примѣчать, что всѣ первыя числа содержащїяся въ нашей формулѣ, заключаются или въ сей $8n+1$, или въ сей $8n+3$; напротивъ того остальныя; кои или въ формулѣ $8n+5$, или въ сей $8n+7$ содержатся, никогда изъ одинакаго и удвоеннаго квадрата состоять не могутъ. Но и то извѣстно, что всѣ первыя числа заключающїяся въ одной изъ первыхъ двухъ формулъ $8n+1$ и $8n+3$ могутъ завсегда на одинакой и двойной квадратъ разрѣшиться.

977.

Равнымъ образомъ приступимъ къ общей формулѣ и разсмотримъ, какїя знаменованїя числамъ x и y дать надлежитъ, чтобъ формула сїя множителей имѣла Понеже оную чрезъ слѣдующее произведенїе представить можно $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то изобрази ка-

ждаго изъ сихъ множителей въ двухъ множителяхъ равнаго свойства; а имянно: возми $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$ и $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$ и будешъ наша формула $xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css)$, откуда явствуетъ, что множители съ самою Формулою будутъ паки того же роду; а знаменованія чиселъ x и y получатся слѣдующимъ образомъ: $x=pr+cqs$, или $x=pr-cqs$; $y=qr+ps$, или $y=ps-qr$; и отсюда легко уже ѵзнать можно, какимъ образомъ формула наша еще большее число множителей имѣть можетъ.

978.

Теперь не трудно раздробить и сію формулу $xx-cyy$ на множителей; потому что только $-c$ на мѣсто $+c$ ставить должно; между тѣмъ можно ихъ также найти безпосредственно такимъ образомъ: когда наша формула равна сему произведенію $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, то возми, какъ слѣдуетъ $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$ и $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-s\sqrt{c})$, от-

откуда найдутся сїи множители: $xx-cyy = (pp-cqq)(rr-css)$, кои также съ нашею формулою одного роду; знаменованїе же чиселъ x и y можно опредѣлить двоякимъ образомъ:

$x=pr+cqs$, $y=qr+ps$; потомъ $x=pr-cqs$ и $y=ps-qr$; но ежели пожелаешь извѣдать выдетъ ли такимъ образомъ найденное произведенїе; то здѣлай пробу съ первыми знаменованїями и будетъ $x^2=pprr+2cqprs+ccqqss$, $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, и $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$; откуда получится $xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$, что съ найденнымъ произведенїемъ $(pp-cqq)(rr-css)$ согласуетъ.

979.

По сїе мѣсто разсматривали мы одинъ только первой членъ: а теперь помножимъ оной буквою a, и станемъ искать какихъ формула $axx+cyy$ множителей имѣть можетъ.

Здѣсь видно, что наша формула равна будетъ сему произведенію $(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c})$, которые оба множителя еще въ множителяхъ изъявить должно; но при семъ бываетъ нѣкоторое затрудненіе: ибо ежели бы слѣдуя прежнему способу положили

$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac}$, и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac}$, то получили бы отсюда $2x\sqrt{a}=2apr-2cqs$, а $2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac}$, и слѣдов. какъ для x, такъ и для y нашлись бы ирраціональныя знаменованія, кои здѣсь имѣть мѣста не могутъ.

980.

Сему затрудненію можно пособить слѣдующимъ образомъ, положивъ $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$, $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}$

$-c-aps\sqrt{-c}$; откуда вмѣсто x и y слѣдующія раціональныя знаменованія найдутся : $x=pr-cqs$, $y=qr+aps$, потомѣ получитъ формула наша слѣдующихъ множителей: $axx+cyy=(app+cqq)(rr+acss)$, изъ которыхъ одинъ только такой же съ нашею формулою видъ имѣетъ , а другой совсемъ иной.

981.

Между тѣмъ однакожъ обѣ сіи формулы великое сходство имѣютъ: ибо всѣ числа содержащіяся въ первой будучи помножены на числа другой обращаются паки въ первую формулу. Мы уже видѣли, что 2 числа второй формулы $xx+acyy$ кои съ числами первой $xx+cyy$ согласуютъ; будучи же между собою помножены производятъ паки число второй формулы.

И такъ надлежитъ еще разыскать, когда два числа первой формулы $axx+cyy$ между собою помножатся , то къ которой формулѣ надлежитъ произведеніе. Чего ради помноживъ формулы перваго

 рода

рода $(app+cqq)(arr+css)$, легко усмотрѣть можно, что произведенїе представить можно такъ: $(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2$; взявъ $apr+cqs=x$ и $ps-qr=y$ получимъ формулу $xx+acyy$, которая до послѣдняго рода надлежитъ. По сему два числа перваго рода $axx+cyy$ помноживъ между собою даютъ число втораго роду. Сїе вкратцѣ изъявить можно такъ: числа перваго роду станемъ означать I; втораго II. слѣдов I. I. даютъ II; I. II даютъ I; II. II даютъ II; откуда такожде явствуетъ, когда много такихъ чиселъ одно на другое множить должно, какъ I I. I даютъ I; I. I. II даютъ II; I. II. II даютъ I; II. II. II. даютъ II.

982.

Для изъясненїя сего пусть будетъ $a=2$ и $c=3$, откуда сїи два рода чиселъ раждаются; первой содержится въ формулѣ $2xx+3yy$, а другой въ формулѣ $xx+6yy$, числа же перваго рода до 50 суть слѣдующїя.

I.

I. 2,3,5,8,11,12,14,18,20,21,27,29,30, 32,35,44,45,48,50. До втораго рода принадлежатъ сiи:

II. 1,4,6,7,9,10,15,16,22,24,25,28, 31, 33, 36, 40, 42, 49, Помножимъ число перваго рода наприм. 35 на одно втораго роду наприм. 31, произведенiе будетъ 1085, которое число заподлинно въ формулѣ $2xx + 3yy$ содержится, или можно вмѣсто y такое найти число, чтобъ $1085 - 3yy$ было удвоенной квадратъ, т. е. $2xx$; сiе учинится, I) когда, $y = 3$: ибо тогда $x = 23$, потомъ также II) ежели $y = 11$, будетъ $x = 19$; III) когда $y = 13$, то $x = 17$, и наконецъ IV) ежели $y = 19$, будетъ $x = 1$. Сiи оба рода чиселъ можно опять раздробить на простыя и составныя. Составныя суть тѣ, кои изъ двухъ, или больше, меньшихъ чиселъ одного, или другаго рода состоятъ. Такимъ образомъ перваго рода простыя числа будутъ слѣдующiя:

2, 3, 5, 11, 29, а составныя сiи 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40 45, 48, 50 и прочч

Втораго же рода простыя числа суть сїи 1, 7, 31; протчїежъ всѣ составыя, яко 4, 6, 9, 10; 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

ГЛАВА XII.

О превращенїи формулы $axx+cyy$ въ квадраты, или въ высшїя степени.

983.

Мы уже прежде видѣли, что числъ формулы $axx+cyy$ иногда квадратами здѣлать не льзя; но какъ скоро сїе возможно будетъ, то помянутую формулу въ другую превратить можно, въ которой $a=1$, какъ наприм. сїя формула $2pp-qq$ будетъ квадратъ, и можно ея представить въ семъ видѣ: $(2p+q)^2-2(p+q)^2$; взявъ теперь $2p+q=x$ и $p+q=y$ получится формула $xx-2yy$, гдѣ $a=1$ и $c=-2$. Подобное превращенїе завсегда имѣетъ мѣсто, сколь часто такую формулу квадратомъ здѣлать можно, и

по

по сему когда формулу $axx+cyy$ квадратомѢ, или другою вышшею четною степенью здѢлать надлежитѢ; то мы заподлинно положить можемѢ $a=1$; а протчїе случаи почтемѢ за не возможныя.

984.

Пусть предложена будетѢ формула $xx+cyy$, которую квадратомѢ здѢлать должно. Понеже она состоитѢ изѢ сихѢ множителей $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то должны оные быть или квадраты, или помноженныя на одно число квадраты; ибо когда произведенїе двухѢ чиселѢ должно быть квадратѢ наприм. pq, то требуется чтобѢ или $p=rr$, а $q=ss$ т. е. чтобѢ каждой множитель былѢ квадратѢ, или чтобѢ $p=mrr$, а $q=mss$, т. е. чтобѢ множители были квадраты на одно число помноженные. Чего ради положи $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, и будетѢ само по себѢ $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, откуда получаемѢ $xx+cyy=mm(pp+cqq)^2$ и слѢд. квадратное число. А для опредѢленїя

буквъ x и y имѣемъ мы сіи уравненія: $x+y\sqrt{-c}=mpp+2mpq\sqrt{-c}-mcqq$ и $x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}-mcqq$, гдѣ какъ видно x равенъ будетъ раціональной части, а $y\sqrt{-c}$ ирраціональной, т. е. $x=mpp-mcqq$ и $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$, или $y=2mpq$.

И по сему положивъ $x=mpp-mcqq$, а $y=2mpq$, формула наша $xx+cyy$ будетъ квадратъ; а имянно $mm(pp+cqq)^2$, коего корень есть $mpp+mcqq$.

985.

Когда два числа x и y одно на другое недѣлимо, или общаго дѣлителя не имѣютъ, то надлежитъ положить $m=1$; такъ ежели $xx+cyy$ должно быть квадратъ, то возми только $x=pp-cqq$ а $y=2pq$, и тогда сія формула равна будетъ квадрату $pp+cqq$. Вмѣсто того, чтобъ брать $x=pp-cqq$, можно также положить $x=cqq-pp$, потому что въ обоихъ случаяхъ квадратъ xx одинаковъ. Сіи суть тѣ же самые формулы,

кои

кои мы совсемъ изъ другихъ нашли основаній, чѣмъ исправность сего способа подтверждается. Ибо по прежнему способу, когда $xx+cyy$ долженствуетъ быть квадратъ, положи корень $=x+\frac{py}{q}$ и получится $xx+cyy=xx+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppyy}{qq}$, гдѣ xx уничтожается, а остальные члены раздѣливъ на y и помноживъ на qq даютъ $cqqy=2pqx+ppy$, или $cqqy-ppy=2pqx$, раздѣливъ теперь на $2pq$ и на y будетъ $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. Понеже x и y должны быть недѣлимыя числа такъ какъ p и q то долженъ x числителю, а y знаменателю быть равенъ, слѣдов. $x=cqq-pp$ а $y=2pq$ какъ и прежде.

986.

Сіе рѣшеніе тоже самое будетъ хотя бы число c было положительное или отрицательное; но ежели оно само имѣетъ множителей такъ какъ предло-

женная формула $xx + acyy$, которая должна быть квадратъ; то прежнее рѣшеніе не только имѣетъ мѣсто, гдѣ $x = acqq - ppy$ а $y = 2pq$, но еще и сіе $x = cqq - app$ и $y = 2pq$: ибо тогда равнымъ образомъ будетъ $xx + acyy = ccqq + 2acpq + aapp = (cq + ap)^2$, что также учинится, когда возмется $x = app - cqq$, потому что квадратъ x выходитъ одинаковъ.

Сіе новое рѣшеніе по употребляемому здѣсь способу найдется такимъ образомъ. Положи $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$ а $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, чтобъ вышло $xx + acyy = (app + cqq)^2$ и слѣдов квадратъ; но тогда будетъ $x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$ и $x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq$, откуда слѣдуетъ $x = app - cqq$ и $y = 2pq$. И такъ когда число ac различными способами на 2 множителя раздѣлиться можетъ, то и многія рѣшенія дать можно.

987.

Мы намѣрены сіе изъяснить нѣкоторыми опредѣленными формулами, и I. когда формула $xx + yy$ должна

быть

быть квадратъ гдѣ $ac=1$, то взявъ $x=pp-qq$ и $y=2pq$ будетъ $xx+yy=(pp+qq)^2$. II. ежели формула $xx-yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=-1$, то возми $x=pp+qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-yy=(pp-qq)^2$; III. когда сія формула $xx+2yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=2$, то положивъ $x=pp-2qq$, или $x=2pp-qq$, а $y=2pq$ будетъ $xx+2yy=(pp+2qq)^2$ или $(2pp+qq)^2$.

IV. Ежели формула $xx-2yy$ квадратомъ быть долженствуетъ, гдѣ $ac=-2$, то возми $x=pp+2qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-2yy=(pp-2qq)^2$. V. Естьли формула $xx+6yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=6$, и слѣдов. или $a=1$, а $c=6$ или $a=2$, а $c=3$, то можно положить сперва $x=pp-6qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(pp+6qq)^2$. Потомъ можно также взять $x=2pp-3qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+6yy=(2pp+3qq)^2$.

988.

Но ежели бы формулу $axx+cyy$ квадратомъ здѣлать надлежало, то уже

выше

выше объявлено, что сему учиниться не льзя, ежели нѣтъ случая напередъ извѣстнаго, въ которомъ сія формула дѣйствительно квадратомъ быть можетъ. И по сему извѣстной случай пусть будетъ; когда $x=f$, а $y=g$; такъ что $aff+cgg=bb$, и тогда формулу нашу въ другую сего роду $tt+acuu$ обратить можно, положивъ $t=\frac{afx+cgy}{b}$, а $u=\frac{gx-fy}{b}$, будетъ $tt=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{bb}$ и uu $=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{bb}$, откуда слѣдуетъ $tt+acuu=\frac{aaffxx+ccggyy+acggxx+acffyy}{bb}$ $=\frac{axx(aff+cgg)+cyy(aff+cgg)}{bb}$; но $aff+cgg$ $=bb$, то $tt+acuu=axx+cyy$; и такимъ образомъ предложенная формула $axx+cyy$ перемѣнится въ сію $tt+acuu$, которая по данному здѣсь правилу легко квадратомъ здѣлана быть можетъ.

989.

989.

Поступимъ теперь далѣе и разсмотримъ какимъ бы образомъ формулу $axx + cyy$, гдѣ x и y между собою недѣлимы, кубомъ здѣлать можно было; къ чему прежнія правила недостаточны, но показанные здѣсь способы съ наилутчимъ успѣхомъ употребить можно. При чѣмъ сіе особливо примѣчанія достойно, что сію формулу завсегда кубомъ здѣлать можно, какого бы свойства числа a и c ни были, чего при квадратахъ не бывало, ежели ни одного случая напередъ не было извѣстнаго: что также о всѣхъ четныхъ степеняхъ разумѣется; а въ нечетныхъ яко въ 3 еи, 5 той, 7 мой рѣшеніе за всегда возможно.

990.

И такъ когда формулу $axx + cyy$ кубомъ здѣлать надлежитъ, то положи подобнымъ образомъ, какъ и прежде, $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$, а $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$: тогда выдетъ изъ того про-

произведенїе $axx+cyy=(app+cqq)^3$, слѣдов. наша формула кубъ. Все дѣло въ томъ только состоитъ, можно ли здѣсь x и y опредѣлить рацїональными, что учинится когда положенные кубы дѣйствительно взяты будутъ, и тогда получимъ мы сїи два уравненїя $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}+3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c}$, и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a}-3appq\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c}$; откуда очевидно слѣдуетъ, что $x=ap^3-3cpqq$, а $y=3appq-cq^3$.

Сыскать наприм. два квадрата xx и yy, коихъ бы сумма $xx+yy$ составила кубъ: понеже здѣсь $a=1$ и $c=1$, то получимъ мы $x=p^3-3pqq$ и $y=3ppq-q^3$ и будетъ $xx+yy=(pp+qq)^3$. Пусть будетъ $p=2$ и $q=1$ найдется $x=2$ а $y=11$; отсюда $xx+yy=125=5^3$.

991.

Разсмотримъ сїю формулу $xx+3yy$, которую кубомъ здѣлать должно. Понеже здѣсь $a=1$, $c=3$, будетъ $x=p^3$

$-9pqq$

$-9pqq$ и $y = 3ppq - 3q^3$, и получится $xx + 3yy = (pp + 3qq)^3$. Понеже сей случай часто попадается, то изобразимъ здѣсь самые легчайшіе;

$p = 1$ и $q = 1$	2, 1	1, 2	3, 1	1, 3	3; 2
$x = 8$ и $y = 0$	10, 9	35, 18	0, 24	80, 72	81, 30
$xx + 3yy = 64 = 4^3$	$343 = 7^3$	$2197 = 13^3$	$1728 = 12^3$	$21952 = 28^3$	$9261 = 21^3$

992.

Ежели же предписанъ будетъ договоръ, что оба числа x и y должны быть между собою недѣлимыя, то бы вопросъ никакой не имѣлъ трудности: ибо когда $axx + cyy$ должно быть кубичное число, то положивъ $x = tz$, а $y = uz$ формула наша будетъ $attzz + cuuzz$, которую уравнивъ кубу $\frac{z^3}{v^3}$ найдется заразъ $z = v^3 (att + cuu)$, слѣдов. искомыя знаменованія вмѣсто x и y; $x = tv^3 (att + cuu)$, а $y = uv^3 (att + cuu)$, кои кромѣ куба v^3 еще $att + cuu$ общимъ дѣлителемъ имѣютъ. Сіе рѣшеніе даетъ $axx + cyy = v^6 (att + cuu)^2 (att + cuu) = v^6 (att + cuu)^3$ кубъ изъ $v^2 (att + cuu)$.

993.

Употребляемые здѣсь способы тѣмъ наипаче достопамятнѣе, что помощію ирраціональныхъ, или еще и мнимыхъ формулъ такія рѣшенія сысканы, къ чему одни только раціональныя, да еще и цѣлыя требовались числа. Но гораздо достопамятнѣе, что въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ неизвлекомость уничтожается, способъ нашъ больше не годится; ибо когда наприм. $xx+cyy$ должно быть кубичное число, то заподлинно заключить можно, что и оба неизвлекомые множители оттуда $x+y\sqrt{-c}$ и $x-y\sqrt{-c}$ кубы быть долженствуютъ; потому что оные между собою недѣлимы; ибо числа x и y общаго дѣлителя не имѣютъ. Но естьли бы неизвлекомость $\sqrt{-c}$ уничтожилась, какъ наприм $c=-1$, то бы основаніе сіе болѣе мѣста не имѣло; потому что тогда бы оба множителя $x+y$ и $x-y$ имѣли общихъ дѣлителей, не смотря на то, что x и y оныхъ имѣть не будутъ; а имянно когда они оба нечетныя числа.

И такъ ежели $xx-yy$ должно быть кубичное число, то не нужно, чтобъ какъ $x+y$, такъ и $x-y$ само по себѣ было кубомъ; но можно положить $x+y = 2p^3$, а $x-y = 4q^3$, и тогда $xx-yy$ безспорно было бы кубомъ, а имянно $8p^3q^3$, коего корень кубичной есть $2pq$, и слѣд. будетъ $x = p^3+2q^3$ и $y = p^3-2q^3$. Но ежели формула $axx+cyy$ на 2 раціональные множителя раздробиться не можетъ, то и никакія другія рѣшенія имѣть мѣста не могутъ, кромѣ тѣхъ, кои здѣсь предложены.

994.

Сіе разсужденіе намѣрены мы изъяснить нѣкоторыми достопамятными вопросами,

Вопросъ. Требуется въ цѣлыхъ числахъ квадратъ xx, къ которому когда придастся 4, то бы вышелъ кубъ. Оные суть 4 и 121, но не можно ли еще больше такихъ найти, о томъ здѣсь спрашивается?

Понеже 4 есть квадратное число, то ищи сперьва случай, гдѢ $xx+yy$ будетъ кубъ, что какъ изъ прежняго явствуетъ, здѢлается, когда $x=p^3-3pqq$ и $y=3ppq-q^3$, но здѢсь $yy=4$, т. е. $y=\pm 2$, слѢдов. должно быть $3ppq\ q^3 = +2$, или $3ppq-q^3=-2$. Въ первомъ случаѢ будетъ $q(3pp-qq)=2$, слѢдов. q дѢлитель 2хъ, и по сему пусть будетъ сперва $q=1$, и получится $3pp-1=2$, слѢдов. $p=1$; по чему $x=2$, а $xx=4$.

Возми $q=2$, будетъ $6pp-8=\pm 2$ взявъ знакъ $+$ найдется $6pp=10$ и $pp=\frac{5}{3}$, почему знаменованiе p было бы неизвлекомое и здѢсь бы не годилось. Взявъ знакъ $-$ будетъ $6pp=6$ и $p=1$, слѢдов. $x=11$ и больше случаевъ не бываетъ. Почему два только квадрата даны быть могутъ, а имянно 4 и 121, къ которымъ когда придастся 4, то произойдутъ кубы.

995.

Вопросъ. Найти такiе квадраты въ цѢлыхъ числахъ, къ которымъ когда придастся 2, то произойдутъ кубы,

какъ

какъ то съ квадратомъ 25 дѣлается; спрашивается, неможно ли еще больше такихъ найти?

Когда $xx+2$ должно быть кубичное число, а 2 есть удвоенной квадратъ, то ищи сперьва случай, въ которомъ формула $xx+2yy$ будетъ кубъ, что изъ прежней 991 статьи здѣлается, гдѣ $a=1$, и $c=2$, $x=p^3-6pqq$ и $y=3ppq-2q^3$; но здѣсь $y=\pm 1$, то должно быть $3ppq-2q^3=q(3pp-2qq)=\pm 1$, и слѣдоват. q есть дѣлитель 1цы; по сему пусть $q=1$, будетъ $3pp-2=\pm 1$, взявъ верхней знакъ получится $3pp=3$ и $p=1$, слѣдоват. $x=5$, а исподней знакъ даетъ для p неизвлекомое знаменованіе, которое здѣсь не годится; откуда слѣдуетъ, что только одинъ квадратъ 25 въ цѣлыхъ числахъ желаемое свойство имѣетъ.

996.

Вопросъ. Сыскать такіе квадраты, кои будучи помножены на 5 и сложены съ 7мью дѣлаютъ кубъ, или $5xx+7$ будетъ кубъ?

Ищи сперьва тѣ случаи, когда $5xx + 7yy$ будетъ кубъ, что по 991 статьѣ учинится, гдѣ $a = 5$, $c = 7x = 5p^3 - 21pqq$ и $y = 15ppq - 7q^3$; понеже здѣсь $y = \pm 1$, то $15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1$ и q должно быть дѣлителемъ 1цы, слѣдовательно 1. По сему $15pp - 7 = \mp 1$; но оба случаи даютъ вмѣсто p нѣчто неизвлекомое, однакожъ изъ сего заключить не льзя, чтобъ вопросъ былъ совсемъ невозможной, потому что p и q дроби быть могутъ, когда $y = 1$, а x цѣлое число. Сїе дѣйствительно бываетъ, когда $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, то будетъ $y = 1$, $x = 2$; но съ другими дробями дѣйствїе сїе невозможно.

997.

Вопросъ. Требуются такїе квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои взявъ вдвое и отнявъ изъ нихъ 5 даютъ кубъ, или $2xx - 5$ должно быть кубъ? Ищи сперьва такїе случаи, въ которыхъ $2xx - 5yy$ будетъ кубъ, что здѣлается по 991 статьѣ, гдѣ $a = 2$ и $c = -5$, когда $x =$

$2p^3$

$2p^3 + 15pqq$ и $y = 6ppq + 5q^3$, но здѣсь должно быть $y = \pm 1$ слѣдовательно $6ppq + 5q^3 = q(6pp + 5qq) = \pm 1$, чему въ цѣлыхъ числахъ быть не льзя, да и въ дробяхъ такожде, для того сей случай весьма достоинъ примѣчанія, въ которомъ хотя рѣшеніе и имѣетъ мѣсто, а имянно: ежели $x = 4$, ибо тогда будетъ $2xx - 5 = 27$ кубъ 3 хъ и немалой стоитъ важности сыскать сему причину.

998.

Возможное дѣло, что $2xx - 5yy$ будетъ кубъ, коего корень имѣетъ сію формулу $2pp - 5qq$ т. е. когда $x = 4$, $y = 1$, $p = 2$, $q = 1$ и еще имѣемъ случай, въ которомъ $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3$, не смотря на то, что оба множители изъ $2xx - 5yy$ т. е. $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$ не кубы. Однакожъ они по сему способу кубы изъ $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ и $p\sqrt{2} - q\sqrt{3}$ быть должны; ибо въ нашемъ случаѣ $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$; напротивъ того $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, что совсемъ

съ $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ не согласуетъ. Но надлежитъ примѣчать, что формула $rr-10ss$ въ безконечно многихъ случаяхъ 1, или -1 быть можетъ; а имянно когда $r=3$ и $s=1$; потомъ когда $r=19$ и $s=6$, кои на формулу $2pp-5qq$ помноживъ, даютъ паки число послѣдней формулы.

И по сему пусть будетъ $ff-10gg=1$, и вмѣсто прежняго $2xx-5yy=(2pp-5qq)$ положимъ вообще $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3$; взявъ множителей будетъ $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3$; но сіе какъ уже мы видѣли $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5}$ вмѣсто сего ради краткости поставимъ $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, что на $f+g\sqrt{10}$ помноживъ даетъ $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, которое должно быть равно $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, откуда выходитъ $x=Af+5Bg$ и $y=Bf+2Ag$; а понеже $y=\pm1$, то необходимо нужно, чтобъ $6ppq+5q^3=1$ было. Но довольно ежели только формула $Bf+2Ag$, т. е. $f(6ppq+5q^3)+2g(2p^3+15pqq)$ равно ±1, гдѣ f и g различныя знаменованія

нованія имѢть могутЪ. Пусть будетЪ наприм. $f=3$ и $g=1$, то сія формула $(18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ должна быть равна ± 1, или должно быть $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

999.

Сіе затрудненіе, выводить всѢ такіе возможные случаи, бываетЪ только тогда, когда вЪ формулѢ $axx+cyy$ число c будетЪ отрицательное; ибо тогда сія формула $axx-cyy$, или сія $xx-acyy$, которая сЪ нею великое сходство имѢетЪ единица быть можетЪ; чему однако никогда статься не льзя, когда c положительное число; понеже $axx+cyy$ или $xx+acyy$ даетЪ завсегда большія числа чѢмЪ больше берутся x и y, того ради предписанной здѢсь способЪ вЪ такихЪ только случаяхЪ сЪ пользою употреблять можно, когда возмутся оба числа a и c положительныя.

1000.

Теперь приступаемЪ мы кЪ четвертой степени и прежде всего усматрива-

емъ, что ежели формула $axx+cyy$ должна быть биквадратъ, то число a надлежитъ быть $=1$; ибо ежели оно не квадратъ, то или бы совсемъ не льзя сей формулы здѣлать только квадратомъ, или ежели бы возможно было, то можно бы ее превратить въ такой видъ: $tt+acuu$; и такъ ограничиваемъ мы вопросъ на послѣдней формулѣ, съ которою прежняя $xx+cyy$ когда $a=1$ сходствуетъ. Теперь дѣло состоитъ въ томъ какого состоянія должны быть знаменованія чиселъ x и y чтобъ сія формула $xx+cyy$ была биквадратъ. Оная состоитъ изъ двухъ множителей $(x+y\sqrt{c})$ $(x-y\sqrt{c})$ то долженъ каждой быть биквадратъ; и для того надлежитъ положить $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^4$ и $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})^4$ откуда формула наша равна будетъ сему биквадрату $(pp+cqq)^4$, а самые буквы x и y изъ разрѣшенія сей формулы опредѣлятся, какъ слѣдуетъ:

$x+y$

$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq-4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$
$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$
слѣдов. $x=p^4 6cppqq+ccq^4$ и $y=4p^3q-4cpq^3$.

1001.

И такъ когда $xx+yy$ долженствуетъ быть биквадратомъ, и понеже здѣсь $c=1$, то имѣемъ мы сіи знаменованія $x=p^4-6ppqq+q^4$ и $y=4p^3q-4pq^3$ и тогда будетъ $xx+yy=(pp+qq)^4$.

Положивъ наприм $p=2$ и $q=1$, получится $x=7$ и $y=24$; отсюда будетъ $xx+yy=625=5^4$; взявъ еще $p=3$ и $q=2$ найдется $x=119$ и $y=120$, почему $xx+yy=13^4$.

1002.

Во всѣхъ четныхъ степеняхъ, коими формулу здѣлать надлежитъ, необходимо нужно, чтобъ сію формулу квадратомъ здѣлать можно было, на которой конецъ довольно знать одинъ только случай, въ которомъ сіе бываетъ; и тогда можно сей формулѣ, какъ уже

мы

мы видѢли, дать сей видЪ $tt+acuu$, гдѢ первой членЪ умноженЪ на 1, и слѢдсв. вЪ формулѢ $xx+cyy$ содержится, которую послѢ подобнымЪ образомЪ какЪ 6 тою, такЪ и другою еще вышшею здѢлать можно.

1003.

ВЪ нечетныхЪ степеняхЪ сей договорЪ не нуженЪ; но числа a и c, какого бы свой тва ни были, то завсегда можно формулу $axx+cyy$ каждою нечетною здѢлать. Желаю наприм. знать 5 тую степень, то надлежитЪ только положить $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$ и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$ и будетЪ очевидно $axx+cyy=(app+cqq)^5$. Понеже теперь 5 тая степень изЪ $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ есть $aap^5\sqrt{a}+5aap^4q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccpq^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$, откуда заразЪ заключить можно что $x=aap^5-10acp^3qq+5ccpq^4$ и $y=5aap^4q-10acppq^3+ccq^5$.

Потребно сумму двухЪ квадратовЪ $xx+yy$ здѢлать 5 тою степенью. ЗдѢсь $a=1$, $c=1$; когда теперь возмется только

только $p=2$ и $q=1$ будетъ $x=38$. $y=41$ и $xx+yy=3125=5^5$.

ГЛАВА XIII

О нѣкоторыхъ формулахъ сего рода ax^4+by^4, коихъ квадратами здѣлать не можно.

1004.

Много труда положено въ изобрѣтеніи двухъ биквадратовъ, коихъ бы сумма или разность была квадратное число; но весь трудъ былъ тщетной, и сыскано на конецъ доказательство, что ни формулы x^4+y^4, ниже сей x^4-y^4 никогда квадратомъ здѣлать не можно, выключая только 2 случая, а имянно когда въ первой или $x=0$ или $y=0$; а въ другой ежели $y=0$, или $y=x$, въ которыхъ случаяхъ дѣло совсемъ видно; но что во всѣхъ остальныхъ оное не возможно, тѣмъ наипаче достопамятно; ибо когда

когда рѣчь о простыхъ квадратахъ, то безконечно много рѣшенїй имѣютъ мѣсто.

1005.

А что бы сїи доказательства надлежащимъ предложить порядкомъ, то прежде всего примѣчать надлежитъ, что оба числа x и y, какъ недѣлимыя между собою въ разсужденїе берутся; ибо ежели бы они должны были имѣть общаго дѣлителя наприм. D, такъ чтобъ можно было положить $x=Dp$ и $y=Dq$, то была бы наша формула $D^4p^4+D^4q^4$ и $D^4p^4-D^4q^4$, которые, ежели бы они были квадраты, раздѣливъ на D^4 остались бы квадратами. Такъ чтобъ сїи формулы p^4+q^4 и p^4-q^4 были квадраты, гдѣ теперь числа p и q никакого больше общаго дѣлителя не имѣютъ; и по сему довольно доказано, что сїи формулы въ случаѣ, когда x и y между собою недѣлимы, квадратами быть не могутъ и доказательство само по себѣ простирается до всѣхъ случаевъ, въ коихъ x и y общаго дѣлителя имѣютъ.

1006.

1006.

И такъ здѣлаемъ начало съ суммы двухъ биквадратовъ т. е. съ формулы $x^4 + y^4$, гдѣ мы x и y какъ недѣлимыя между собою числа разсматривать будетъ; а что бы показать что $x^4 + y^4$, выключая помянутые случаи, квадратъ быть не можетъ, то производится доказательство слѣдующимъ образомъ; есть ли бы кто захотѣлъ опровергнуть наше положенїе, то бы надлежало утверждать, что такїя знаменованїя для x и y возможны, что бы $x^4 + y^4$ было квадратъ, оныя знаменованїя сколь бы велики ни были: ибо заподлинно въ малыхъ ни одного не попадается.

Но ясно показать можно, что хотя бы такїя знаменованїя для x и y, и въ самыхъ большихъ числахъ попались; то бы изъ оныхъ заключить можно было и о малыхъ числахъ, а изъ сихъ бы еще о меньшихъ, и такъ далѣе. Но понеже въ малыхъ числахъ такихъ знаменованїй нѣтъ, выключая два помянутыя,

но

но которыя ни къ какимъ другимъ насъ не приводятъ, то заподлинно можно заключить, что и въ большихъ да и въ самыхъ пребольшихъ числахъ нѣтъ такихъ знаменованій для x и y. Равнымъ образомъ о разности двухъ биквадратовъ x^4 и y^4 доказывается, какъ мы заразъ покажемъ.

1007.

Дабы показать, что $x^4 - y^4$ квадратъ быть не можетъ, выключая два случая, кои сами чрезъ себя видны, то надлежитъ примѣчать слѣдующія положенія.

I. Полагаемъ мы, что числа x и y между собою недѣлимы, или общаго дѣлителя не имѣютъ, слѣдов. оба или нечетные или одно четное, а другое нечетъ.

II. Но оба нечетныя быть не могутъ, ибо сумма двухъ нечетныхъ квадратовъ ни когда квадратомъ быть не можетъ; потому что нечетной квадратъ завсегда въ формулѣ $8n + 1$ содержится, и слѣдов. сумма двухъ нечетныхъ

четныхЪ квадратовЪ имѢла бы формулу $8n+2$, которая на 2, а не на 4 дѢлится, и слѢдов. квадратомЪ быть не можетЪ; что также сЪ двумя нечетными биквадратами бываетЪ.

III. И по сему ежели бы x^4+y^4 было квадратЪ, то должно одному быть четному, а другому нечетному, какЪ мы выше сего видѢли, что ежели сумма двухЪ квадратовЪ должна быть квадратЪ, то корень одного чрезЪ $pp-qq$, а другаго чрезЪ $2pq$ изЪявить можно, откуда слѢдуетЪ, что должно быть $xx=pp-qq$, а $yy=2pq$ и тогда бы было $x^4+y^4=(pp+qq)^2$.

IV. И такЪ было бы здѢсь y четное, а x нечетное число, и $xx=pp-qq$, то надлежитЪ одному изЪ чиселЪ p и q быть четному, а другому нечетному; но первое p не можетЪ быть четное: потому что иначе $pp-qq$, какЪ число формулы $4n-1$, или $4n+3$, никогда квадратомЪ быть не мо-

жетЪ,

жетъ, и слѣдов. должно бы быть p нечетное, а q четное, гдѣ само по себѣ разумѣется, что оные должны быть между собою недѣлимы.

V. Когда $pp-qq$ должно быть равно квадрату xx, то учинится сїе, какъ мы прежде видѣли, ежели $p=rr+ss$ и $q=2rs$; ибо оттуда было бы $xx=(rr-ss)^2$ и слѣдов. $x=rr-ss$.

VI. Но yy долженствуетъ также быть квадратъ, и когда мы только имѣли $yy=2pq$, то будетъ теперь $yy=4rs(rr+ss)$, которая формула должна быть квадратъ, слѣдов. $rs(rr+ss)$ должно быть такожде квадратъ, гдѣ r и s недѣлимыя между собою числа, и потому находящїяся здѣсь 3 множителя r, s и $rr+ss$ общаго дѣлителя не имѣютъ.

VII. Но ежели произведенїе изъ большаго числа множителей, кои между собою недѣлимы, должно быть квадратъ,

то каждой множитель самъ по себѣ долженъ быть квадратъ; и такъ положи $r = tt$ и $s = uu$, то должно также $t^4 + u^4$ быть квадратъ; и по сему ежели бы $x^4 + y^4$ было квадратное число, то бы также и $t^4 + u^4$, т. е. сумма двухъ биквадратовъ была бы квадратъ. Причемъ надлежитъ примѣчать, что было бы $xx = t^4 + u^4$ и $yy = 4ttuu(t^4 + u^4)$, гдѣ очевидно числа t и u гораздо меньше нежели x и y, затѣмъ что x и y опредѣляются уже четвертыми степенями чиселъ t и u, и слѣдов. безспорно были бы гораздо больше.

VIII. И такъ ежели бы два квадрата какъ x^4 и y^4 въ самыхъ большихъ числахъ были, то можно бы оттуда вывесть сумму двухъ гораздо меньшихъ биквадратовъ, которая бы равнымъ образомъ была квадратъ; а отсюда можно бы еще о меньшихъ суммахъ заключить, и наконецъ пришли бы къ самымъ малымъ числамъ;

 но

но когда такая сумма въ малыхъ числахъ не возможна, то слѣдуетъ изъ сего, что и въ пребольшихъ числахъ оной суммы не будетъ.

IX. Хотя и можно здѣсь сказать, что въ малыхъ числахъ дѣйствительно такія есть, какъ уже съ начала примѣчено, а имянно когда одинъ биквадратъ $=0$; но къ сему случаю заподлинно притти не льзя, когда такимъ образомъ къ малымъ назадъ пойдешь; ибо было бы въ малой суммѣ t^4+u^4, или $t=0$, или $u=0$, то должно бы также и въ большой суммѣ быть $y=0$, которой случай въ разсужденіе не входитъ.

1008.

Теперь приступаемъ мы къ другому главному положенію, что и разность двухъ биквадратовъ x^4-y^4 никогда квадратомъ быть не можетъ, кромѣ случаевъ $y=0$ и $y=x$: ради сего доказательства надлежитъ примѣчать слѣдующіе пункты.

I.

I. Когда числа x и y между собою недѣлимы, и слѣдов. или оба нечетныя, или одно четное, а другое нечетъ, то въ обоихъ случаяхъ разность двухъ квадратовъ можетъ быть паки квадратъ; чего ради сіи два случая особливо примѣчать должно.

II. И такъ пусть будутъ вопервыхъ оба числа x и y нечетныя; и положи $x = p + q$, а $y = p - q$, и тогда одно изъ чиселъ p и q должно быть четное, а другое нечетъ, то будетъ $xx - yy = 4pq$, $xx + yy = 2pp + 2qq$, слѣдов. наша формула $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$, которая долженствуетъ быть квадратъ, почему и четвертая ея часть, т. е $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, коей множители между собою недѣлимы, и слѣдов. каждый долженъ быть квадратъ; а понеже одно число p четное, а другое q нечетъ, то имѣемъ мы 3хъ между собою недѣлимыхъ множителей $2p$, q и $pp + qq$. И такъ чтобъ первые два здѣлать квадратами, то положи $2p = 4rr$, или

 $p = 2rr$

$p=2rr$, а $q=ss$, гдѣ s нечетъ будетъ третей множитель $4r^4+s^4$, которой также квадратъ быть долженъ.

III. Но s^4+4r^4 есть сумма двухъ квадратовъ, изъ которыхъ s^4 нечетъ, а $4r^4$ четъ, то положи корень перваго $ss=tt-uu$, гдѣ t нечетъ, а u четъ, послѣдней же $2rr=2tu$, или $rr=tu$, гдѣ t и u между собою недѣлимы.

IV. Понеже $tu=rr$ квадратъ быть долженствуетъ, то какъ t такъ и u надлежитъ быть квадратомъ; сего ради положи $t=mm$ а $u=nn$, гдѣ m нечетъ, а n четъ, будетъ $ss=m^4-n^4$ такъ что опять разность двухъ биквадратовъ, а имянно m^4-n^4 должна быть квадратъ, но явно есть, что сіи числа были гораздо меньше нежели x и y.

Потому что r и s очевидно меньше нежели x и y, а сверьхъ сего еще m и n меньше нежели r и s, и такъ ежели бы въ большихъ числахъ дѣло было возмо-

жное

жное и $x^4 - y^4$ было бы квадратЪ, то было бы и вЪ самыхЪ малыхЪ также возможно, и такЪ далѣе, пока бы не пришли кЪ самымЪ малымЪ числамЪ, гдѣ бы дѣло было возможное.

V. Но самыя меньшія числа, вЪ которыхЪ сіе возможно, суть когда одинЪ биквадратЪ равенЪ 0, или равенЪ другому. По первому надлежало бы быть $n = 0$, слѣдов. $u = 0$, потомЪ $r = 0$ и $p = 0$, $x = -y$, или $x^4 = y^4$; но здѣсь о такомЪ случаѣ не говорится. А ежели бы $n = m$, то было бы $t = u$, потомЪ $s = 0$ и $q = 0$ и наконецЪ $x = y$, которой случай мѣста здѣсь не имѣетЪ.

1009.

Здѣсь можно сказать, что когда m нечетЪ, а n четЪ, то послѣдняя разность не сходствуетЪ больше сЪ первою, и такЪ отсюда далѣе о малыхЪ числахЪ заключать не льзя. Но довольно когда отЪ первой разности дошли до другой

и теперь покажемъ, что также x^4-y^4 квадратомъ быть не можетъ, когда одинъ биквадратъ четной, а другой нечетной.

I. По первому когда бы x^4 четъ, а y^4 нечетъ, то бы дѣло само по себѣ было не возможное, потому что вышло бы число формулы $4n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. И по сему пусть будетъ x нечетъ, а y четъ, то должно быть $xx=pp+qq$ и $y=2pq$ и тогда выдетъ $x^4-y^4=p^4-2ppqq+q^4=(pp-qq)^2$, гдѣ изъ p и q одно должно быть четное, а другое нечетное.

II. когда $pp+qq$ должно быть квадратъ, то будетъ $p=rr-ss$, а $q=2rs$, слѣдов. $x=rr+ss$; но отсюда $yy=2(rr-ss)2rs$ или $yy=4rs(rr-ss)$, которое должно быть квадратъ и слѣдоват. четвертая онаго также часть т. е. $rs(rr-ss)$, гдѣ множители между собою недѣлимы.

III. И такъ положивъ $r=tt$, $s=uu$ будетъ третей множитель $rr-ss=t^4-u^4$,

которой

которой равнымЪ образомЪ долженЪ быть квадратЪ ; но оной также есть разность двухЪ биквадратовЪ , кои гораздо меньше первыхЪ, то получаетЪ чрезЪ сїе доказательство совершенную крѢпость; такЪ что ежели бы вЪ большихЪ числахЪ разность двухЪ биквадратовЪ была квадратЪ , то бы можно оттуда найти завсегда меньшїе такїе разности , не приходя кЪ очевиднымЪ двумЪ случаямЪ; и по сему заподлинно вЪ большихЪ числахЪ сїе также не возможно.

1010.

Первую часть сего доказательства, когда оба числа x и y взяты нечетныя , можно сократить слѢдующимЪ образомЪ. Ежели бы x^4-y^4 было квадратЪ то должно бы быть $xx=pp+qq$ и $yy=pp-qq$, гдѢ изЪ буквЪ p и q одна четная, а другая нечетЪ ; но тогда бы вышло $xxyy=p^4-y^4$, слѢдов. p^4-q^4 должно бы также быть квадратомЪ , что есть раз-

ность двухъ такихъ биквадратовъ, изъ коихъ одинъ четной, а другой нечетъ, а что сему статься не льзя, то вторая доказательства часть показываетъ.

1011.

И такъ доказали мы сіи два главныя правила, что ни сумма, ни разность двухъ биквадратовъ никогда квадратнымъ числомъ быть не можетъ, выключая немногіе очевидные случаи.

Почему ежели другіе формулы, кои квадратами здѣлать надлежитъ, такого свойства будутъ, что или сумма или разность двухъ биквадратовъ должна быть биквадратъ, то равнымъ образомъ такіе формулы не возможны. Сіе случается въ ниже слѣдующихъ формулахъ, кои мы присовокупить намѣрены.

I. Не возможно чтобъ формула $x^4 + 4y^4$ была квадратъ, ибо она есть сумма двухъ биквадратовъ; то должно бы быть $xx = pp - qq$ и $2yy = 2pq$, или $yy = pq$, но p и q между собою недѣлимыя числа

сла, и для того надлежало бы каждому быть квадратомЪ; сего ради положивЪ $p = rr$, $q = ss$ будетЪ $xx = r^4 - s^4$ и слѣдов. разность двухЪ биквадратовЪ должна быть квадратЪ, чему статься не льзя.

II. Не можно также чтобЪ формула $x^4 - 4y^4$ была квадратЪ; ибо надлежало бы быть $xx = pp + qq$, $2yy = 2pq$, но тогда вышло бы $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$: но $yy = pq$, то должно бы p и q каждому быть квадратомЪ. ВзявЪ $p = rr$, $q = ss$ получится $xx = r^4 + s^4$, слѣдов. сумма двухЪ биквадратовЪ долженствовала бы быть квадратомЪ, чему статься не льзя.

III. Формула $4x^4 y^4$ не можетЪ также быть квадратомЪ; ибо тогда y неотмѣнно должно бы быть четное число: положивЪ $y = 2z$ было бы $4x^4 - 16z^4$ и четвертая сего часть $x^4 - 4z^4$ должна быть квадратЪ; что по прежнему не возможно.

IV.

IV. Формулѣ $2x^4 + 2y^4$ квадратомъ быть не льзя, потому что оной долженъ быть четной и слѣд. $2x^4 + 2y^4 = 4zz$, то вышло бы $x^4 + y^4 = 2zz$, и по сему $2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$, слѣдов. квадратъ. Равнымъ образомъ было бы $2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ также квадратъ. Но понеже какъ $2zz + 2xxyy$ такъ и $2zz - 2xxyy$ вышли бы квадраты, то надлежало бы ихъ произведенїю $4z^4 - 4x^4y^4$ и четвертой его части быть квадратомъ; но сїя четвертая часть есть $z^4 - x^4y^4$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ, чему статься не можно.

V. На конецъ формула $2x^4 - 2y^4$ квадратомъ быть не можетъ; ибо оба числа x и y нечетныя; въ противномъ случаѣ имѣли бы они общаго дѣлителя. Такожде одно четное, а другое нечетное быть не могутъ: потому что иначе одна бы часть на 4, а другая только на 2 и слѣдов. самая формула на 2 только могла бы раздѣлиться; для того надлежитъ обо-

имъ

имъ быть нечетнымъ. Возми $x=p+q$ и $y=p-q$, то одно изъ чиселъ p и q четное, а другое нечетъ, и понеже $2x^4-2y^4=2(xx+yy)(xx-yy)$, то получится $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$, а $xx-yy=4pq$, и по сему формула наша $16pq(pp+qq)$ и 16 тая ея часть $pq(pp+qq)$ должна быть также квадратъ. Но когда множители между собою не-дѣлимы, то каждому надлежитъ быть квадратомъ. Положивъ вмѣсто двухъ первыхъ $p=rr$, $q=ss$ будетъ третей $=r^4+s^4$, которой также долженъ бы быть квадратъ; но сему статься не можно.

1012.

Подобнымъ образомъ доказать можно, что формула x^4+2y^4 квадратомъ быть не можетъ; самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

I. x не можетъ быть четное число, ибо y было бы нечетное и формула могла бы только на 2, а не на 4 раздѣлиться,

дѣлиться; чего ради x должно быть нечетное число.

II. Положи квадратной корень формулы нашей $= xx + \frac{2pyy}{q}$, чтобы оной былъ нечетъ и будетъ $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4pxxyy}{q} + \frac{4ppy^4}{qq}$, гдѣ x^4 уничтожается, а остальные члены раздѣливъ на yy и помноживъ на qq даютъ $4pqxx + 4ppyy = 2qqyy$, или $4pqxx = 2qqyy - 4ppyy$, отсюда $\frac{xx}{yy} = \frac{qq - 2pp}{2pq}$, слѣдовательно $xx = qq - 2pp$, а $yy = 2pq$, такїе же формулы, какъ и прежде были.

III. И такъ $qq - 2pp = xx$ надлежало бы паки быть квадратъ, что иначе учиниться не можетъ, какъ только ежели $q = rr + 2ss$, а $p = 2rs$, и тогда бы было $xx = (rr + 2ss)^2$, а потомъ $yy = 4rs(rr + 2ss)$ и четвертая сего также часть $rs(rr + 2ss)$ должна бы быть квадратъ, слѣдов. r и

и s каждой особливо. Положивъ $r = tt$, $s = uu$ будетъ третей множитель $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, которой также долженъ быть квадратъ.

IV. Чего ради ежели бы $x^4 + 2y^4$ было квадратъ, то бы и $t^4 + 2u^4$ было квадратомъ, гдѣ числа t и u были бы гораздо менше нежели x и y, и такимъ бы образомъ завсегда доходить можно было до меньшихъ чиселъ; но когда сїя формула въ малыхъ числахъ квадратомъ быть не можетъ то оная, какъ легко усмотрѣть можно, не будетъ также квадратомъ и въ большихъ числахъ.

1013.

Что же напротивъ того до формулы $x^4 - 2y^4$ касается, то объ ней доказать не льзя, чтобъ она не могла быть квадратомъ; и когда подобнымъ образомъ изчисленїе производить станешь, то можно безконечно много найти случаевъ, въ которыхъ она дѣйствительно будетъ квадратъ; ибо ежели $x^4 - 2y^4$ должно-

жно быть квадратомъ, то выше сего показано, что $xx = pp + 2qq$, а $y = 2pq$, и пополучится тогда $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$; но и $pp + 2qq$ также квадратъ быть долженствуетъ. Сїе учинится ежели $p = rr - 2ss$, а $q = 2rs$ и будетъ $xx = (rr + 2ss)^2$. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что здѣлалось бы сїе положивъ $p = 2ss - rr$, $q = 2rs$; по чему сїи два случая рзсмотреть должно.

I. Пусть будетъ вопервыхъ $p = rr - 2ss$, $q = 2rs$, и будетъ $x = rr + 2ss$; а понеже $yy = 2pq$, то $yy = 4rs(rr - 2ss)$ и должны r и s быть квадратами: чего ради взявъ $r = tt$ $s = uu$, будетъ $yy = 4ttuu(t^4 - 2u^4)$ и слѣдов. $y = tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$; а $x = t^4 + 2u^4$.

И такъ ежели $t^4 - 2u^4$ есть квадратъ, то будетъ также $x^4 - 2y^4$ квадратъ. Хотя t и меньшїя числа нежели x и y, то не льзя по прежнему заключить чтобъ $x^4 - 2y^4$ могло быть квадратъ, понеже оттуду приходимъ мы къ подобной формулѣ въ меньшихъ числахъ; ибо x^4

$-2y^4$

$-2y^4$ можетъ быть квадратъ не доходя до формулы t^4-2u^4, потому что сїе инымъ образомъ учиниться можетъ, а именно: въ другомъ случаѣ, которой мы еще разсмотрѣть имѣемъ.

II. По сему пусть будетъ $p=2ss-rr$, $q=2rs$, то хотя и будетъ по прежнему $x=rr+2ss$; но для y получится $yy=2pq=4rs(2ss-rr)$. Взявъ теперь $r=tt$, $s=uu$ получится $yy=4ttuu(2u^4-t^4)$. слѣд. $y=2tu\sqrt{(2u^4\ t^4)}$, а $x=t^4+2u^4$; откуда явствуетъ, что формула наша x^4-2y^4 также квадратъ быть можетъ, ежели сїя $2u^4-t^4$ квадратомъ будетъ. Сїе очевидно сдѣлается, когда $t=1$, $u=1$, почему получитъ $x=3$, $y=2$, откуда формула наша будетъ $81-2.16=49$.

III. Мы уже прежде видѣли, что $2u^4-t^4$ будетъ квадратъ, когда $u=13$ и $t=1$, потому что тогда $\sqrt{(2u^4-t^4)}=239$. Поставивъ теперь сїи знаменованїя вмѣсто t и u получимъ новой случай для нашей формулы; а имянно $x=1+2.13^4=57123$ и $y=2.13.239=6214$.

IV. Но какъ скоро найдены знаменованія вмѣсто x и y, то можно оныя поставить въ формулѣ No 1, вмѣсто t и u и получатся новыя вмѣсто x и y.

Нашедъ $x=3$, $y=2$, положимъ въ первомъ рѣшеніи $t=3$, $u=2$, и тогда $\sqrt{(t^4-2u^4)}=7$, то получимъ новыя знаменованія $x=81+2.16=113$ и $y=2.3.2.7=84$, а отсюда найдемъ $xx=12769$, $x^4=163047361$, потомъ $yy=7056$, $y^4=49787136$, по сему будетъ $x^4-2y^4=63473089$ чего квадратной корень есть 7967, которой во всемъ сходствуетъ съ положенными съ начала $pp-2qq$; ежели $t=3$, $u=2$ будетъ $r=9$ и $s=4$, чего ради $p=81-32=49$ и $q=72$; отсюда $pp-2qq=2401-10368=-7967$.

ГЛАВА

ГЛАВА XIV.

Разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ принадлежащихъ до сей части аналитики.

1014.

До сихъ поръ изъясняли мы нужныя пріемы случающіеся въ сей части аналитики, дабы рѣшить всѣ сюда принадлежащіе вопросы, и сіе самое намѣрены мы здѣсь пространнѣе изъяснить нѣкоторыми предложенными вопросами съ ихъ рѣшеніемъ.

1015.

Вопросъ. Найти число, къ которому когда придастся, или изъ онаго вычтется 1, то бы въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ?

Положи искомое число x, то какъ $x+1$, такъ и $x-1$ должно быть квадратъ, для перваго возми $x+1=pp$, будетъ $x=pp-1$, а $x-1=pp-2$, что также должно быть квадратомъ. Положивъ корень его $p-q$ будетъ $pp-2=pp-2pq+qq$, гдѣ

pp уничтожается и найдется $p = \frac{qq+2}{2q}$, а отсюда потомъ сыщется $x = \frac{q^4+4}{4qq}$, гдѣ q по изволенїю и въ дробяхъ также взять можно; того ради положи $q = \frac{r}{s}$ и получится $x = \frac{r^4+4s^4}{4rrss}$, котораго меньшїя знаменованїя здѣсь предложимъ.

когда	$r = 1$	2	1	3
	$s = 1$	1	2	1
будетъ	$x = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

1016.

Вопросъ. Сыскать число, къ которому когда два произволящїя числа на прим. 4 и 7 придадутся, то бы въ обоихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему двѣ Формулы $x+4$ и $x+7$ долженствуютъ быть квадраты, чего ради положи для первой $x+4 = pp$, будетъ $x = pp-4$; а другая формула $pp+3$ также

же квадратомъ быть должна; положивъ ея корень $=p+q$ будетъ $pp+3=pp+2pq+qq$, откуда найдется $p=\frac{3-qq}{2q}$, слѣд. $x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Взяевъ вмѣсто q дробь $\frac{r}{s}$, получимъ $x=\frac{9s-22rrss+r^4}{4rrss}$, гдѣ вмѣсто r и s всѣ произволящія числа брать можно.

Положи $r=1$ и $s=1$ будетъ $x=-3$, а отсюда $x+4=1$, $x+7=4$. Но ежели пожелаешь имѣть вмѣсто x положительныя числа, то возьми $s=2$, $r=1$ и получится $x=\frac{57}{16}$, и почему $x+4=\frac{121}{16}$ и $x+7=\frac{166}{9}$. Естьли же положить $s=3$, $r=1$, то найдется $x=\frac{133}{9}$, откуда $x+4=\frac{169}{9}$ и $x+7=\frac{196}{9}$.

Но когда послѣдней членъ долженъ превышать средней, то возьми $r=5$, $s=1$, и будетъ $x=\frac{21}{25}$, а отсюда $x+4=\frac{121}{25}$ и $x+7=\frac{196}{25}$.

1017.

Вопросъ. Сыскать такую дробь, которую когда или придашь къ 1, или

вычтешь изъ оной, тобъ въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ?

Когда сїи двѣ формулы $1+x$ и $1-x$ должны быть квадратами, то положи для первой $1+x=pp$, будетъ $x=pp-1$, а другая формула $1-x=2-pp$, также должна быть квадратомъ; но здѣсь ни первой ни послѣдней членъ не квадраты, то надлежитъ смотрѣть нельзя ли попасть на такой случай, въ которомъ сїе дѣлается. Такой случай заразъ попадается, а имянно, когда $p=1$, для того возьми $p=1-q$, такъ что $x=qq-2q$ и будетъ наша формула $2-pp=1+2q-qq$, коей корень положивъ $=1-qr$, получится $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$, отсюда $2-q=-2r+qrr$ и $q=\frac{2r+2}{rr+1}$, почему $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$.

Понеже r есть дробь, то возьми $r=\frac{t}{u}$, и будетъ $x=\frac{4tu^3-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$, слѣдов. u должно быть меньше нежели t. и по сему положи $u=2$, $t=1$ выдетъ $x=\frac{24}{25}$; взявъ $u=3$, $t=2$ найдется $x=\frac{120}{169}$,

а отсюда $1+x=\frac{289}{169}$, $1-x=\frac{49}{169}$, кои оба суть квадраты.

1018.

Вопросъ. Найти такія числа x, которыя когда къ 10 придадутся, или изъ 10 вычтутся, чтобъ вышли квадраты?

Обѣ сіи формулы $10+x$ и $10-x$ должны быть квадратами, и сіе могло бы учиниться по прежнему способу; но чтобъ показать другой путь, то приведи себѣ на память, что и произведеніе сихъ формулъ должно быть также квадратъ, а имянно $100-xx$. Но здѣсь первой членъ уже квадратъ, то положи корень $=10-px$, и будетъ $100-xx=100-20px+ppxx$, откуда $x=\frac{20p}{pp+1}$, но изъ сего слѣдуетъ, что произведеніе только квадратъ, а не каждое число особливо. Естьли же одно будетъ квадратъ, то и другое неотмѣнно также быть долженствуетъ.. Первое здѣсь $10+x=$ 10

$\frac{10pp+20p+10}{pp+1} = \frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$, но $pp+2p+1$ уже квадратъ, то надлежитъ еще сей дроби $\frac{10}{pp+1}$ быть квадратомъ, слѣдов. и сей $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Теперь нужно только, чтобъ число $10pp+10$ было квадратъ, гдѣ опять случай отгадать надлежитъ. Оной будетъ, когда $p=3$; чего ради положивъ $p=3+q$ получится $100+60q+10qq$, возьми сего корень $=10+qr$, и будетъ $100+60q+10qq = 100+20qr+qqrr$, откуда $q=\frac{60-20r}{rr-10}$, потомъ $p=3+q$ и $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Взявъ $r=3$, будетъ $q=0$, $p=3$ и $x=6$; отсюда $10+x=16$ и $10-x=4$. Но когда возмется $r=1$, то получится $q=-\frac{40}{9}$, $p=\frac{-13}{9}$ и $x=-\frac{234}{25}$; но все равно положить $x=\frac{234}{25}$ и будетъ $10+x=\frac{484}{25}$ и $10-x=\frac{16}{25}$, кои оба суть квадраты.

1019.

1019.

Примѣчанїе. Ежели соизволишь сей вопросъ здѣлать всеобщимъ и для каждаго даннаго числа a число x найти пожелаешь, что бы какъ $a+x$ такъ и $a-x$ были квадраты, то рѣшенїе сїе бываетъ иногда не возможно, а имянно во всѣхъ случаяхъ, гдѣ число a меньше суммы двухъ квадратовъ. Мы уже прежде видѣли, что отъ 1 до 50 слѣдующїя числа суммы двухъ квадратовъ, или кои въ формулѣ $xx+yy$ содержатся:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. слѣдоват. остальныя 3, 6, 7, 11. 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48 не могутъ раздѣлиться на два квадрата. Слѣдов. какъ скоро a будетъ одно изъ сихъ послѣднихъ чиселъ, то вопросъ будетъ невозможной.

Для изъясненїя сего положивъ $a+x=pp$ и $a-x=qq$ найдется по сложе-

нїю $2a = pp + qq$, такъ что $2a$ должно быть суммою квадратовъ. Но когда $2a$ есть такая сумма, то и a также быть долженствуетъ и по сему ежели a не будетъ сумма двухъ квадратовъ, то не возможно, чтобъ $a + x$ и $a - x$ были квадратами.

1020.

По сему когда $a = 3$, то вопросъ невозможной, для того 3 не сумма двухъ квадратовъ. Хотя и можно сказать, что найдутся можетъ быть два квадрата въ ломаныхъ числахъ, коихъ сумма составитъ квадратъ; но и сему также статься не льзя: ибо ежели бы было $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$, то помноживъ на $qqss$ вышло бы $3qqss = ppss + qqrr$, гдѣ $ppss + qqrr$ есть сумма двухъ квадратовъ, которые бы на 3 могли раздѣлиться; но мы прежде видѣли, что сумма двухъ квадратовъ другихъ дѣлителей имѣть не можетъ кромѣ тѣхъ, кои сами суть такїя же суммы.

Хотя

Хотя числа 9 и 45 на 3 раздѣлишь можно, но оныя также и на 9 дѣлимы; да и каждой при томъ квадратъ, изъ которыхъ они состоятъ, а имянно $9=3^2+0^2$ и $45=6^2+3^2$; что здѣсь мѣста не имѣетъ. По чему сіе слѣдствіе справедливо, что ежели число *a* въ цѣлыхъ числахъ суммою двухъ квадратовъ не будетъ, то сему и въ дробяхъ статься не льзя. А когда число *a* въ цѣлыхъ числахъ сумма двухъ квадратовъ, то оное и въ дробяхъ безконечно многими способами быть можетъ суммою двухъ квадратовъ, что мы показать намѣрены.

1021.

Вопросъ. Число, которое есть сумма двухъ квадратовъ, раздробить безконечно многими способами на суммы двухъ квадратовъ?

Пусть будетъ предложенное число $ff+gg$, и надлежитъ сыскать другіе два квадрата, яко xx и yy коихъ сумма $xx+yy$ равна числу $ff+gg$, такъ что $xx+yy$ $=ff$

$=ff+gg$. Здѣсь заразъ видно, что ежели x будетъ больше или меньше нежели f, то напротивъ того y долженъ быть меньше или болше числа g; чего ради возми $x=f+pz$; $y=g-qz$ и будетъ $ff+2fpz+ppzz+gg-2gqz+qqzz=ff+gg$, гдѣ ff и gg уничтожаются, а остальные члены на z могутъ раздѣлиться; и получится $2fp+ppz-2gq+qqz=0$, или $ppz+qqz=2gq-2fp$, слѣдов. $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, откуда для x и y слѣдующія найдутся знаменованія $x=\frac{2gpq+f(qq-pp)}{pp+qq}$, и $y=\frac{2fpq+g(pp-qq)}{pp+qq}$, гдѣ вмѣсто p и q всѣ возможныя числа брать можно. Пусть наприм. данное число будетъ 2, такъ что $f=1$ и $g=1$, будетъ $xx+yy=2$; когда $x=\frac{2pq+qq-pp}{pp+qq}$ и $y=2pq+pp-qq$, то положивъ $p=2$, а $q=1$ найдется $x=\frac{1}{5}$ и $y=\frac{7}{5}$.

1022.

1022.

Вопросѣ. Когда число a есть сумма двухѣ квадратовѣ, найти такія числа, чтобѣ какѣ $a+x$, такѣ и $a-x$ были квадраты?

Пусть данное число $a=13=9+4$; взявѣ $13+x=pp$, $13-x=qq$, сложеніе дастѣ вопервыхѣ $26=pp+qq$, а вычитаніе $2x=pp-qq$; слѣдов. p и q такого состоянія быть должны, чтобѣ $pp+qq$ равно было 26ти, которое число есть также сумма двухѣ квадратовѣ, а имянно $25+1$, и такѣ сіе число 26 надлежитѣ раздробить на 2 квадрата, изѣ коихѣ большей взять вмѣсто pp, а меньшей вмѣсто qq и получится $p=5$, $q=1$, откуда $x=12$. А потомѣ по прежнему число 26 можно безконечно многими способами раздѣлить на два квадрата: понеже $f=5$ и $g=1$, то ежели вѣ прежнихѣ формулахѣ вмѣсто буквѣ p и q напишемѣ t и u, а на мѣсто x и y поставимѣ p и q, то найдемѣ $p=\frac{2tu+5(uu-tt)}{tt+uu}$ и $q=\frac{10tu+tt-uu}{tt+uu}$. Когда же

теперь

теперь возмутся вмѣсто t и u числа по изволенїю и опредѣлятся изъ нихъ буквы p и q, то получится искомое число $x = \frac{pp-qq}{2}$

Пусть будетъ наприм. $t=2$, $u=1$, то выдетъ $p=\frac{11}{5}$ и $q=\frac{23}{5}$, слѣдов. $pp-qq=\frac{408}{25}$ и $x=\frac{204}{25}$

1023.

А что бы сему вопросу дать общее рѣшенїе, то пусть данное число будетъ $a=cc+dd$, а искомое $=z$, такъ что сїи формулы $a+z$ и $a-z$ должны быть квадратами.

Положивъ $a+z=xx$ и $a-z=yy$ будетъ вопервыхъ $2a=2(cc+dd)=xx+yy$; слѣдов. квадраты x и y такого свойства быть должны, чтобъ $xx+yy=2(cc+dd)$, гдѣ $2(cc+dd)$ есть также сумма двухъ квадратовъ, а имянно: $(c+d)^2+(c-d)^2$. Возми ради краткости $c+d=f$, $c-d=g$, такъ что будетъ $xx+yy=ff+gg$; но сїе по прежнему

нему учинится взявъ $x = \frac{2gpq - f(qq - pp)}{pp + qq}$ и $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, откуда получаемъ самое легкое рѣшенїе, когда положимъ $p = 1$ и $q = 1$; ибо тогда найдется $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$, а $y = f = c + d$; слѣдов. $z = 2cd$; а отсюда $cc + dd + 2cd = (c + d)^2$ и $cc + dd - 2cd = (c - d)^2$. Для нахожденїя другаго рѣшенїя пусть будетъ $p = 2$, $q = 1$ и выдетъ $x = \frac{c - 7d}{5}$, а $y = \frac{7c + d}{5}$, гдѣ какъ c и d такъ x и y можно взять отрицательными, потому что ихъ квадраты только входятъ; но когда x долженъ быть больше нежели y, то возми d отрицательное, и найдется $x = \frac{c + 7d}{5}$, а $y = \frac{7c - d}{5}$; откуда $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, которая величина когда придастся къ a, то дастъ $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, чего квадратной корень есть $\frac{c + 7d.}{5}$. Ежели же z вычтень

чтешь изъ a, то останется $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$ сего квадратной корень есть $\frac{7c-d}{5}$ т. е. первой x, а сей y.

1024.

Вопросъ. Найти число x, такое что ежели какъ къ нему самому, такъ и къ его квадрату xx придастся 1, чтобъ въ обоихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему обѣ формулы $x+1$ и $xx+1$ надлежитъ здѣлать квадратами: чего ради положи для первой $x+1=pp$ и будетъ $x=pp-1$; а вторая формула $xx+1=p^4-2pp+2$, также должна быть квадратомъ; но оная есть такого свойства, что никакого рѣшенія найти не можно, прежде нежели извѣстнаго случая не будетъ; а такой случай заразъ попадается, а имянно: когда $p=1$; для того возми $p=1+q$, и будетъ $xx+1=1+4qq+4q^3+q^4$, что многими способами квадратомъ здѣлать можно.

I.

I. Взявъ корень $=1+qq$, будетъ $1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$, откуда $4q+4qq=2q$, $4+4q=2$ и $q=-\frac{1}{2}$; слѣдов. $p=\frac{1}{2}$, а $x=-\frac{3}{4}$

II. Положивъ корень $=1-qq$ получится $1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4$, откуда $q=-\frac{3}{2}$, $p=-\frac{1}{2}$, слѣдов. $x=-\frac{3}{4}$, какъ и прежде.

III. Возми корень $=1+2q+qq$, чтобы первые и два послѣдніе члены уничтожились, и будетъ $1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4$; отсюда $q=-2$ и $p=1$, по чему $x=0$.

IV. Можно также положить корень $=1-2q-qq$, и будетъ $1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+2qq+4q^3+q^4$, откуда $q=-2$, какъ и прежде.

V. Для уничтоженія 2хъ первыхъ членовъ возми корень $=1+2qq$, и будетъ $1+4qq+4q^3+q^4=1+4qq+4q^4$, откуда $q=\frac{4}{3}$ и $p=\frac{7}{3}$. слѣдов. $x=\frac{40}{9}$, а изъ сего $x+1=\frac{49}{9}=(\frac{7}{3})^2$ и $xx+1=\frac{1681}{81}=(\frac{41}{9})^2$.

Когда кто пожелаетъ сыскать больше знаменованій вмѣсто q, то надлежитъ взять одно изъ найденныхъ напр. $-\frac{1}{2}$ и положить потомъ $q = -\frac{1}{2} + r$, но отсюда было бы $p = \frac{1}{2} + r. pp = \frac{1}{4} + r + rr$ и $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$; по чему формула наша $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, которая должна быть квадратъ, и слѣдов. умноженная на 16 также т. е. $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$, которой формулы возми

I. корень $5 + fr + 4rr$, такъ что $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr$
$+ ffrr$
$\pm 8fr^3 + 16r^4$; но понеже первые и послѣдніе члены здѣсь уничтожаются, то опредѣли f такъ, чтобъ и вторые члены уничтожились, что учинится положивъ $-24 = 10f$, слѣдов. $f = \frac{12}{5}$, остальныеже члены раздѣливъ на rr даютъ $-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr$; удержавъ верхней знакъ будетъ $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, откуда $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$; но $f = -\frac{12}{5}$, то $r = \frac{21}{20}$, слѣдов. $p = \frac{31}{20}$ и $x = \frac{561}{400}$, а отсюда $xx + 1 = \left(\frac{689}{400}\right)^2$

II,

II. Взявъ нижней знакъ будетъ $-8+32r$ $=-40+ff-8fr$, и найдется $r=\frac{ff-32}{32+8f}$, но $f=-\frac{12}{5}$, то $r=-\frac{41}{20}$, слѣдов. $p=\frac{31}{20}$, и отсюда прежнее выходитъ уравненіе.

III. Пусть будетъ корень $4rr+4r\pm5$, такъ что $16r^4+32r^3-8rr-24r+25=16r^4+32r^3 {\pm40rr \atop +16rr} \pm40r+25$, гдѣ два первые и послѣдней членъ уничтожаются, а остальныя раздѣливъ на r даютъ $-8r-24=\pm40r+16r\pm40$; или $-24r-24=\pm40r\pm40$; взявъ верхней знакъ будетъ $-24r-24=40r+40$ или, $0=64r+64$, или $0=r+1$, т. е. $r=-1$ и $p=-\frac{1}{2}$, которой случай уже мы имѣли, и тотъ же самой слѣдуетъ когда возмется исподней знакъ.

IV. Положивъ корень $=5+fr+grr$ опредѣли буквы f и g, такъ чтобъ 3 первые члена уничтожились. Понеже здѣсь $25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4$, то вопервыхъ

$-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$; потомъ $-8 = 10g + ff$, по чему $g = \frac{-8-ff}{10}$ или $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$; а оба послѣдніе члена раздѣливъ на r^3 даютъ $32 + 16r = 2fg + ggr$, откуда $r = \frac{2fg-32}{16-gg}$. Здѣсь числитель $2fg - 32 = \frac{24.172 - 32.625}{5.125} = -\frac{32.496}{625}$, или $-\frac{16.32.31}{625}$, а знаменатель $16 - gg = (4+g)(4-g) = \frac{328}{125} \cdot \frac{672}{125}$, или $9\frac{41.8.4.21}{25.625} = \frac{8\ 32\ 41.21}{25.625}$; отсюда $r = -\frac{1550}{861}$ и $p = -\frac{2239}{1722}$; а изъ сего новое знаменованіе числа x найдется т. е. $x = pp - 1$.

1025.

Вопросъ. Къ даннымъ тремъ числамъ a, b и c найти такое число x, которое естьли къ каждому изъ нихъ приложится, то произойдутъ квадраты, т. е сіи 3 формулы $x + a$, $x + b$ и $x + c$ надлежитъ здѣлать квадратами?

Положи

Положи для первой $x+a=zz$, такъ что $x=zz-a$, то прочія формулы будутъ $zz+b-a$ и $zz+c-a$, изъ коихъ каждая должна быть квадратомъ; но сему общаго рѣшенія дать не льзя, потому что сіе часто бываетъ невозможно и зависитъ единственно отъ свойства обоихъ чиселъ $b-a$ и $c-a$; ибо ежели бы наприм. было $b-a=1$ и $c-a=-1$. т е. $b=a+1$ и $c=a-1$, то должно бы обѣимъ формуламъ быть квадратами, а имянно: $zz+1$ и $zz-1$, гдѣ безъ сомнѣнія z долженствуетъ быть дробь; чего ради положивъ $z=\frac{p}{q}$ были бы сіи формулы квадратами, а имянно: $pp+qq$ и $pp-qq$, слѣдов. и ихъ произведеніе т. е. p^4-q^4 также должно быть квадратъ; но что сему статься не льзя, прежде сего уже показано.

Когда $b-a=2$ и $c-a=-2$ то есть $b=a+2$ и $c=a-2$, то взявъ $z=\frac{p}{q}$ сіи двѣ формулы $pp+2qq$ и $pp-2qq$ должны бы быть квадратами слѣдов. и ихъ произведеніе p^4-4q^4 также, но сіе равнымъ образомъ невозможно.

Положи вообще $b-a=m$ и $c-a=n$. потомъ также $z=\frac{p}{q}$, то должны формулы $pp+mqq$ и $pp-nqq$ быть квадратами; что, какъ мы уже и видѣли не возможно, ежели $m=+1$, а $n=-1$, или когда $m=+2$, а $n=-2$,

Не возможно также, когда $m=ff$, а $n=-ff$; ибо было бы тогда произведенie $p^4-f^4q^4$ разность двухъ квадратовъ, которая никогда квадратомъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ ежели $m=2ff$, и $n=-2ff$, то обѣ формулы $pp+2ffqq$ и $pp-2ffqq$ не могутъ быть квадратами, потому что ихъ произведенie $p^4-4f^4q^4$ также долженствовало бы быть квадратомъ; слѣд. положивъ $fq=r$ сiя формула p^4-4r^4, чему невозможность прежде уже показана.

Когда же $m=1$ и $n=2$, такъ что формулы $pp+qq$ и $pp+2qq$ квадратами быть должны, то положивъ $pp+qq=rr$ и $pp+2qq=ss$ будетъ изъ первой $pp=rr-qq$, слѣдов. другая $rr+qq=ss$, почему какъ $rr-qq$ такъ и $rr+qq$ должны быть квадраты и

ихъ

ихЪ произведеніе также; однакожЪ сему статься нельзя. Отсюда довольно явствуетЪ что не легко прибрать такія числа вмѣсто m и n, чтобЪ рѣшеніе было возможно.

Средство угадывать, или находить вмѣсто m и n надлежащія знаменованія, есть слѣдующее.

ПоложивЪ $ff+mgg=hh$ и $ff+ngg=kk$, изЪ первой получится $m=\frac{hh-ff}{gg}$, а изЪ второй $n=\frac{kk-ff}{gg}$, возми теперь вмѣсто f, g, h и k числа по изволенію, и получатся для m и n такія знаменованія, гдѣ рѣшеніе будетЪ возможно.

Пусть на прим. $h=3$, $k=5$, $f=1$ и $g=2$, то будетЪ $m=2$. а $n=6$. Теперь мы увѣрены, что возможно обѣ формулы $pp+2qq$ и $pp-6qq$ здѣлать квадратами: сіе учинится, когда $p=1$ и $q=2$. Первая формула будетЪ квадратЪ, ежели $p=rr-2ss$ и $q=2rs$: ибо тогда получится $pp+2qq=(rr+2ss)^2$,

другая же формула $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, гдѣ извѣстной случай, въ которомъ будетъ она квадратъ, есть когда $p=1$ и $q=2$, что учинится положивъ $r=1$ и $s=1$ или $r=s$ и формула наша выдетъ $25s^4$. Зная теперь сей случай возмемъ $r=s+t$ и будетъ $rr=ss+2st+tt$, а $r^4=s^4+4s^3t+6sstt+4st^3+t^4$, почему наша формула будетъ $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$, коея корень пусть будетъ $5ss+fst+tt$, котораго квадратъ есть $25s^4+10fs^3t+10sstt+2fst^3+t^4$, гдѣ пер-
$+ffsstt$

вые и послѣдніе члены сами чрезъ себя уничтожаются. Возми теперь f такъ чтобъ и предпослѣдніе уничтожились, что здѣлается когда $4=2f$ и $f=2$, а остальные раздѣливъ на sst даютъ уравненіе $44s+26t=10fs+10t+fft=20s+14t$, или $2s=-t$, $s=-\frac{t}{2}$ и $\frac{s}{t}=-\frac{1}{2}$, почему $s=-1$ и $t=2$, или $t=-2s$, слѣдов. $r=-s$ и $rr=ss$ самой извѣстной случай. Возми f такъ, чтобы вторые члены уничтожились: сіе здѣлается когда $44=10f$, или $f=\frac{22}{5}$, остальные же члены раздѣливъ на

stt

stt даютъ $26s+4t=10s+ffs+2ft$ т. е. $-\frac{84}{25}s=\frac{24}{5}t$, слѣдов. $t=-\frac{7}{10}s$, и такъ $r=s+t=\frac{3}{10}s$, или $\frac{r}{s}=\frac{3}{10}$, почему $r=3$ и $s=$ [illegible]; откуда получаемъ мы, $p=2ss-rr=191$ и $q=2rs=60$, почему формула наша $pp+2qq=43681=209^2$ и $pp+6qq=58081=241^2$.

1026.

Примѣчанїе. Такихъ чиселъ, которыя формулу нашу дѣлаютъ квадратомъ по прежнему способу найти еще и больше можно; но надлежитъ примѣчать, что содержанїе сихъ чиселъ m и n по произволенїю брать можно.

Пусть будетъ сїе содержанїе какъ $a:b$ и возми $m=az$, а $n=bz$, то дѣло состоитъ только въ томъ, какимъ образомъ опредѣлить z, чтобъ обѣ формулы $pp+azqq$ и $pp+bzqq$ квадратами здѣлать можно было, что мы въ слѣдующемъ вопросѣ покажемъ.

1027.

Вопросъ Даны числа a и b, сыскать число z, чтобъ обѣ формулы pp

 $+azqq$

$+azqq$ и $pp+bzqq$ были квадратами, и притомъ самыя менщія взять знаменованія для p и q?

Положи $pp+azqq=rr$, $pp+bzqq=ss$ и помножь первую на b, а другую на a, то разность ихъ дастъ сїе уравненїе $(b-a)pp=brr\ ass$; откуда $pp=\frac{brr-ass}{b-a}$, которая формула должна быть квадратъ, что и учинится положивъ $r=s$, а для избѣжанія дробей возми $r=s+(b-a)t$ и будетъ $pp=\frac{brr-ass}{b-a}=\frac{bs+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}$ ($-ass$) $=\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}=ss+2bst+b(b-a)tt$; положивъ $p=s+\frac{x}{y}t$ будетъ $pp=ss+\frac{2x}{y}st+\frac{xx}{yy}tt$, гдѣ ss уничтожается, а остальные члены раздѣливъ на t и помноживъ на yy даютъ $2bsyy+b(b-a)tyy=2sxy+txx$, откуда $t=\frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$, почему $\frac{t}{s}=\frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}$, слѣдов. $t=2xy-2byy$ а $s=b(b-a)yy-xx$; потомъ $r=2(b-a)xy$

$-b$

$-b(b-a)yy-xx$ и отсюда $p=s+\frac{x}{y}t=b(b-a)yy+xx-2bxy=(x-by)^2-abyy$. Нашедъ p, r и s осталось еще сыскать z; на сей конецъ вычти первое уравненїе $pp+azqq=rr$ изъ другаго $pp+bzqq=ss$, остатокъ будетъ $zqq(b-a)=ss-rr=(s+r)(s-r)$; но $s+r=2(b-a)xy-2xx$, $s-r=2b(b-a)yy-2(b-a)xy$; или $s+r=2x((b-a)y-x)$ и $s-r=2by((b-a)y-(b-a)x=2(b-a)y(by-x)$; отсюда $(b-a)zqq=(2x((b-a)y-x).(2(b-a)y(by-x))$ или $zqq=(2x((b-a)y-x)(2y(by-x)=4xy((b-a)y-x)(by-x)$ слѣдов. $z=\frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}$, почему вмѣсто qq берется самой большой квадратъ, на котораго числитель можетъ раздѣлиться, а вмѣсто p нашли уже мы $p=b(b-a)yy+xx-2bxy=(x-by)^2-abyy$, откуда видно, что сїи формулы будутъ простѣе когда возмется $x-by=v$, или $x=v+by$ и будетъ $p=vv-abyy$, а $z=\frac{4(v+by)y(v)(v+ay)}{qq}=\frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}$, гдѣ числа v и y по

изво-

изволенію взять можно и найдется сперва qq, когда вмѢсто его большой квадратЪ возмется, которой содержится вЪ числителѢ, а отсюда уже найдется z, потомЪ $m = az$, $n = bz$, и на конецЪ $p = vv - abyy$; а отсюда получатся искомыя формулы.

I. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v + ay)(v + by)$ квадратЪ, коего корень есть $r = -vv - 2avy - abyy$, а другая формула $pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by)$ которая также квадратЪ, коего корень $s = -vv - 2bvy - abyy$, гдѢ знаменованія чиселЪ r и s положительныя также быть могутЪ. Сіе потребно изЪяснить нѢкоторыми примѢрами.

1028.

ПримѢрЪ. Пусть будетЪ $a = -1$ и $b = +1$; найти такія числа вмѢсто z, чтобЪ сіи 2 формулы $pp - zqq$ и $pp + zqq$ могли быть квадратами, а имянно первая $= rr$; а другая $= ss$?

ЗдѢсь

Здѣсь будетъ $p = rr + yy$, а чтобъ найти z, то надлежитъ разсмотрѣть формулу $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$ и взять вмѣсто v и y слѣдующія числа;

v = 2 - - - -	3	4	5 - -	16	8
y = 1 - - - -	2	1	4 - -	9	1
$v-y$ = 1 - - - -	1	3	1 - -	7	7
$v+y$ = 3 - - - -	5	5	9 - -	25	9
zqq = 4.2 1.3	120	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
qq = 4 - - - -	4	16	9.16	36.25 16	16.9
z = 6 - - - -	30	15	5 - -	7 - - - -	14
p = 5 - - - -	13	17	41 -	337 - -	65

откуда имѣемъ мы слѣдующія вмѣсто z знаменованія

I	II	III	IV	V	VI
6	30	15	5	7	14

почему слѣдующіе формулы могутъ разрѣшиться.

I. формулы $pp - 6qq$ и $pp + 6qq$ могутъ быть квадратами, когда $p = 5$ и $q = 2$; ибо первая будетъ $25 - 24 = 1$, а другая $= 25 + 24 = 49$.

II.

II. Также сіи двѣ $pp - 30qq$ и $pp + 30qq$ будутъ квадратами, когда $p = 13$ и $q = 2$; ибо первая $= 169 - 120 = 49$, а другая $= 169 + 120 = 289 = 17^2$.

III. Слѣдующіе двѣ формулы $pp - 15qq$ и $pp + 15qq$ будутъ также квадратами, ежели $p = 17$ и $q = 4$; первая будетъ $= 289 - 240 = 49$, а другая $= 529 = 23^2$.

IV. Квадратами также могутъ быть сіи двѣ формулы $pp - 5qq$ и $pp + 5qq$, что учинится, когда $p = 41$ и $q = 12$; первая будетъ $= 1681 - 720 = 961 = 31^2$, а другая $2401 = 49^2$.

V. Наконецъ формулы $pp - 7qq$ и $pp + 7qq$ будутъ квадратами, полагая $p = 337$, а $q = 120$; первая выдетъ $= 113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, а другая $= 113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

1029.

Примѣръ. Когда оба числа m и n содержатся между собою какъ $1 : 2$; т. е. когда $a = 1$ и $b = 2$, слѣдов. $m = z$ и $n = 2z$, над-

надлежитѣ сыскать знаменованіе вмѣсто z, чтобѣ сіи двѣ формулы $pp+zqq$ и $pp+2zqq$ были квадратами? Кѣ сему всеобщей формулы употреблять не нужно; но заравѣ сей примѣрѣ сѣ прежнимѣ снести можно: ибо положивѣ $pp+zqq=rr$ и $pp+2zqq=ss$, найдется изѣ первой $pp=rr-zqq$, которую величину вмѣсто pp поставивѣ во второй будетѣ $rr+zqq=ss$; то сіи формулы $rr-zqq$ и $rr+zqq$ сдѣлать можно квадратами, и есть случай прежняго примѣра; по чему слѣдующія будутѣ здѣсь вмѣсто z знаменованіи: 6, 30, 15, 5, 7, 14, и проч.

Такое превращеніе и вообще сдѣлать можно зная что 2 формулы $pp+mqq$ и $pp+nqq$ квадратами быть могутѣ. Взявѣ $pp+mqq=rr$ и $pp+nqq=ss$ первая даетѣ $pp=rr-mqq$, слѣдов. вторая $rr-mqq+nqq=ss$ или $rr+(n-m)qq=ss$; слѣдов когда первая возможна, то и сіи формулы $rr-mqq$ и $rr+(n-m)qq$ также возможны; но понеже m и n можно намѣ переставить, то и

сіи возможны $rr-nqq$ и $rr+(m-n)qq$. Естьли же прежнія формулы не возможны, то и сіи такожде.

1030.

Примѣръ Пусть будутъ числа m и n какъ 1 : 3, или $a=1$, $b=3$; слѣдов. $m=z$ а $n=3z$, такъ что сіи формулы $pp+zqq$ и $pp+3zqq$ должны быть квадратами.

Понеже здѣсь $a=1$, $b=3$, то завсегда дѣло будетъ возможное, когда только $zqq=4vy(v+y)(v+3y)$ и $p=vv-3yy$, чего ради возми вдѣсто v и y слѣдующія знаменованія.

$v=1$	3 -	4 -	1 - -	16 - - -
$y=1$	2 -	1 -	8 - -	9 - - -
$v+y=2$	5 -	5 -	9 - -	25 - - -
$v+3y=4$	9 -	7 -	25 - -	43 - - -
$zqq=4.8$	9.4.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
$qq=4.4$	4.9	4.4	4.4.9.25	4 9.16.25
$z=2$	30	35	2 - - -	43 - - - -
$p=2$	3	13	191 - -	13 - - - -

Здѣсь

здѣсь имѣемъ мы 2 случая для $z=2$, почему двоякимъ образомъ формулы $pp+2qq$ и $pp+6qq$ квадратами здѣлать можемъ. Во первыхъ учинится сiе, когда $p=2$ и $q=4$, слѣдов. также, когда $p=1$, $q=2$, и найдется $pp+2qq=9$, а $pp+6qq=25$.

Потомъ бываетъ также сiе, когда $p=191$ и $q=60$: ибо тогда получится $pp+2qq=(209)^2$ и $pp+6qq=(241)^2$. Но не можетъ ли также быть $z=1$? Сiе бы здѣлалось естьлибъ вмѣсто zqq вышелъ квадратъ, что разрѣшить трудно. Естьли же бы захотѣли разрѣшить сей вопросъ, могутъ ли двѣ формулы $zz+qq$ и $zz+3qq$ быть квадратами, или нѣтъ, то слѣдующимъ образомъ рѣшенiе расположить можно.

1031.

Надлежитъ разыскать, могутъ ли формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ быть квадратами, или нѣтъ. Положивъ $pp+qq=rr$, $pp+3qq=ss$ надлежитъ примѣчать слѣдующее.

I. Числа p и q можно взять недѣлимыми между собою: ибо естьли бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы формулы остались еще квадратами, ежели бы p и q на онаго раздѣлились.

II. p четное число быть не можетъ: потому что q было бы нечетное и слѣдов. вторая формула была бы число сего роду $4n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Почему p неотмѣнно нечетъ, а pp число сего рода $8n+1$.

III. Когда p нечетъ, то изъ первой формулы q не только четное, но еще и на 4 дѣлимо, дабы qq было число сего рода $16n$, а $pp+qq$ сего $8n+1$.

IV. Также p на 3 не можетъ быть дѣлимо: ибо pp могло бы на 9 раздѣлиться, а qq нѣтъ; слѣдов. $3qq$ только на 3, а не на 9; и такъ $pp+8qq$ только на 3, а не на 9, и для того квадратомъ быть не можетъ. По

сему

сему число p на 3 недѣлимо, а pp будетъ сего роду $3n+1$.

V. Когда p на 3 недѣлимо, то должно q дѣлиться на 3: ибо естьли бы q на 3 было недѣлимо, то было бы qq число сего рода $3n+1$, и по сему $pp+qq$ сего $3n+2$, которое квадратомъ быть не можетъ; слѣд. q должно на 3 дѣлиться.

VI. Также p на 5 недѣлимо быть можетъ: ибо ежели бы сїе такъ было, то бы q на 5 не дѣлилось, и qq число сего рода $5n+1$, или $5n+4$; слѣд. $3qq$ число сего рода $5n+3$ или $5n+2$, котораго рода было бы также $pp+3qq$, и слѣд. не могло бы быть квадратомъ, почему p неотмѣнно должно быть на 5 недѣлимо, а pp число сего рода $5n+1$, или $5n+4$.

VII. Ежели p на 5 недѣлимо, то посмотритъ, можетъ ли q раздѣлиться на 5, или нѣтъ. Естьли бы q на 5 не дѣлилось, то бы qq было сего роду $5n+2$, или $5n+3$, какъ уже мы видѣли, и было бы тогда pp или, $5n$ $+1$,

$+1$, или $5n+4$, а $pp+3qq$, или $5n+1$, или $5n+4$, такъ какъ и pp. Пусть будетъ $pp=5n+1$, то надлежало бы быть $qq=5n+5$: ибо иначе $pp+qq$ не могло бы быть квадратомъ; но вышло бы $3qq=5n+2$. и $pp+3qq=5n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Когда же $pp=5n+4$, то должно бы $qq=5n+1$, и $3qq=5n+3$; слѣдов. $pp+3qq=5n+2$, что также квадратомъ не будетъ. Отсюда слѣдуетъ, что qq должно дѣлиться на 5.

VIII. Когда q на 4, потомъ на 3 и наконецъ на 5 дѣлиться должно, то надлежитъ быть число $4.3.5n$ или $q=60n$; по чему наша формула будетъ $pp+3600nn=rr$, и $pp+10800nn=ss$. Вычти первую изъ второй, и будетъ $7200nn=ss-rr=(s+r)(s-r)$, такъ что $s+r$ и $s-r$ должны быть множители числа $7200nn$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ s такъ и r должны быть нечетныя числа, и при томъ между собою недѣлимы.

IX.

IX. По сему пусть будетъ $7200nn = 4fg$, коего множители $2f$ и $2g$ взявъ $s + r = 2f$, а $s - r = 2g$ будетъ $s = f + g$, $r = f - g$, гдѣ f и g должны быть между собою неделимы, одно четъ, а другое нечетъ; но понеже $fg = 1800nn$, то $1800nn$ надлежитъ раздробить на 2 множителя, изъ коихъ бы одинъ былъ четной, а другой нечетъ, и притомъ не имѣли бы общаго дѣлителя.

X. Надлежитъ еще примѣчать, что ежели $rr = pp + qq$, и слѣдственно r дѣлитель числа $pp + qq$, то число $r = f - g$ также должно быть суммою двухъ квадратовъ; а понеже оно нечетъ, то въ формулѣ $4n + 1$ содержаться долженствуетъ.

XI. Взявъ $n = 1$ будетъ $fg = 1800 = 8.9.25$, откуда слѣдующія раздробленія выходятъ: $f = 1800$ и $g = 1$, или $f = 200$, и $g = 9$, или $f = 72$, а $g = 25$, или $f = 225$, а $g = 8$. по первому будетъ $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; по второму $r = f - g = 191 = 4n + 3$; по третьему $r = f - g = 47 = 4n + 3$, и наконецъ по четвертому $r = f - g = 217 = 4n + 1$.

По чему 3 первые не годятся, а остается только четвертое раздробленіе; откуда вообще заключить можно, что самой большей множитель нечетной, а меньшей четной быть должны. Но здѣсь также знаменованіе $r=217$ имѣть мѣста не можетъ, потому что сіе число на 7 дѣлится, которое не сумма двухъ квадратовъ.

XII. Положивъ $n=2$ будетъ $fg=7200=32.225$; взявъ $f=225$ и $g=32$, такъ что $r=f-g=193$, которое число есть сумма двухъ квадратовъ и достойно, чтобъ съ нимъ пробу здѣлать. Когда $q=120$ и $r=193$, то $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, но $r+q=313$ и $r-q=73$, то явствуетъ, что вмѣсто pp квадрата не выдетъ, потому что оба множители не квадраты.

Естьли бы кто похотѣлъ взять на себя сей трудъ и брать вмѣсто n другія числа, то весь бы трудъ былъ тщетной; что мы показать намѣрены.

1032.

1032.

Өеорема. Не возможно, чтобѣ двѣ формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ были вдругѣ квадратами; или вѣ такихѣ случаяхѣ, когда одна будетѣ квадратѣ, то другая заподлинно не квадратѣ; что доказываемѣ мы такимѣ образомѣ.

Когда p нечетѣ, а q четѣ, какѣ мы видѣли, то $pp+qq$ не иначе квадратомѣ быть можетѣ, какѣ только естьли $q=2rs$ и $p=rr-ss$; другая же $pp+3qq$ иначе квадратомѣ не будетѣ, какѣ только естьли $q=2tu$, а $p=tt-3uu$, или $3uu-tt$. Понеже вѣ обоихѣ случаяхѣ q должно быть удвоенное произведенїе, то положи вмѣсто обоихѣ $q=2abcd$, и возми для перваго $r=ab$ и $s=cd$, а для другаго $t=ac$ и $u=bd$. Вѣ первомѣ случаѣ будетѣ $p=aabb-ccdd$; а вѣ другомѣ $p=aacc-3bbdd$, или также $3bbdd-aacc$, которыя оба знаменованїя одинаковы быть долженствуютѣ. И такѣ получимѣ мы, или $aabb-ccdd=aacc-3bbdd$, или $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$; при чемѣ должно знать,

что числа a, b, c и d вообще меньше нежели p и q; по чему надлежитъ намъ разсмотрѣть каждой изъ сихъ двухъ случаевъ особенно. Изъ перваго получаемъ мы $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$, или $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, откуда $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, которая дробь должна быть квадратъ; но понеже здѣсь числитель и знаменатель инаго общаго дѣлителя кромѣ 2хъ имѣть не могутъ, потому что разность оныхъ есть $2dd$, и такъ ежели бы 2 было общимъ дѣлителемъ, то надлежало бы какъ $\frac{aa + dd}{2}$, такъ и $\frac{aa + 3dd}{2}$ быть квадратами; но оба числа a и d въ семъ случаѣ нечетныя; слѣдов. ихъ квадраты надлежатъ до формулы $8n + 1$, почему послѣдняя формула $\frac{aa + 3dd}{2}$ получитъ сей видъ $4n + 2$, которой квадратомъ быть не можетъ: по чему 2 общимъ дѣлителемъ быть не можетъ; но числитель $aa + dd$, и знаменатель $aa + 3dd$ между собою недѣлимы, слѣдов каждой долженъ быть квадратомъ: потому что сіи формулы съ первыми сходны. Откуда

куда слѣдуетъ, что ежели бы первые были квадратами, то бы и въ меньшихъ числахъ такiе формулы квадратами были, и такимъ бы образомъ можно было притти къ меньшимъ числамъ; но когда такихъ формулъ въ малыхъ числахъ нѣтъ, то и въ большихъ также не будетъ. Сiе слѣдствiе столь же справедливо, какъ и прежней второй случай $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ ведетъ къ тому же. Но отсюда $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, или $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, почему $\frac{aa}{dd} = \frac{bb + cc}{3bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, которая дробь должна быть квадратъ; и симъ прежнее доказательство подкрѣпляется: ибо естьли бы были такiе случаи въ большихъ числахъ, гдѣ $pp + qq$, и $pp + 3qq$ квадраты, то бы также и въ малыхъ числахъ оные быть долженствовали, однакожъ невозможны.

1033.

Вопросъ. Найти 3 такiя числа x, y и z, изъ которыхъ ежели 2 между собою

помножатся и къ произведенію придастся 1, тобъ вышли квадраты?

По чему сіи 3 формулы I) $xy+1$, II) $xz+1$, III) $yz+1$ должны быть квадратами.

Возьми для двухъ послѣднихъ $xz+1 = pp$, $yz+1=qq$, и найдется $x=\frac{pp-1}{z}$, а $y=\frac{qq-1}{z}$; почему первая формула будетъ $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, которая должна быть квадратъ и слѣдственно умноженная на zz, т. е. сія $(pp-1)(qq-1)+zz$, которую легко квадратомъ здѣлать можно: ибо положивъ корень ея $=z+r$ получится $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, откуда $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, гдѣ вмѣсто p, q и r можно брать числа по изволенію.

Положивъ напр. $r=-pq-1$ будетъ $rr=ppqq+2pq+1$, и $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=$

pp

$\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$, слѣдов. $x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}$ $=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$ и $y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Ежели пожелаешь имѣть цѣлыя числа, то положи первую формулу $xy+1=pp$, и возьми $z=x+y+q$, будетъ 2рая формула $xx+xy+xq+1=xx+xq+pp$, а третья $xy+yy+qy+1=yy+qy+pp$, кои очевидно будутъ квадратами, когда возмется $q=\pm 2p$: ибо тогда вторая будетъ $xx\pm 2px+pp$, коего корень есть $x\pm p$; третья же будетъ $yy\pm 2py+pp$, коей корень $y\pm p$. Почему имѣемъ мы сіе изрядное рѣшеніе: $xy+1=pp$, или $xy=pp-1$, что для каждаго числа, которое за p берется, легко здѣлаться можетъ; потомъ и третье число есть двояко, или $z=x+y+2p$, или $z=x+y-2p$, что мы слѣдующими примѣрами изъяснить намѣрены.

I. Взявъ $p=3$ будетъ $pp-1=8$; теперь положи $x=2$, $y=4$ и получится z,

или

или $=12$, или $z=0$, слѣдов. 3 искомыя числа суть 2, 4 и 12.

II. Пусть $p=4$ будетъ $pp-1=15$: взявъ $x=3$ и $y=5$ будетъ $z=16$, или $z=0$; почему 3 искомыя числа суть 3, 5 и 16.

III. Пусть $p=5$ будетъ $pp-1=24$ и положивъ $x=3, y=8$ найдется $z=21$, или также $z=1$, откуда слѣдующія выходятъ числа 1, 3 и 8; или 3, 8 и 21.

1034.

Вопросъ. Сыскать 3 такія цѣлыя числа x, y и z, что ежели къ произведенію изъ каждыхъ двухъ придастся данное число a, тобъ произошелъ квадратъ?

Слѣдов. сіи 3 формулы должны быть квадратами: I) $xy+a$, II) $xz+a$, III) $yz+a$. Поставь за первую $xy+a=pp$, и возми $z=x+y+q$, то вторая $xx+xy+xq+a=xx+xq+pp$; а третья $xy+yy+qy+a=yy+qy+pp$, кои обѣ бубудутъ квадратами, когда $q=\pm 2p$ такъ, что

что $z = x + y + 2p$, и отсюда двѣ величины для z найти можно.

1035.

Вопросъ. Требуются 4 цѣлыя числа x, y, z и v, такъ что ежели къ произведенїю изъ каждыхъ двухъ придастся данное число a, то бы каждой разъ вышелъ квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ надлежитъ здѣлать квадратами: I) $xy + a$; II) $xz + a$; III) $yz + a$; IV) $xv + a$; V) $yv + a$, VI) $zv + a$. Поставь за первую $xy + a = pp$, и возми $z = x + y + 2p$, то будетъ 2рая и 3тья формула квадратъ. Потомъ возми $v = x + y - 2p$ будетъ 4тая и 5тая формула квадратъ, слѣдоват. осталась только 6тая, которая будетъ $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, и которая также должна быть квадратъ. Понеже $pp = xy + a$, то будетъ послѣдняя формула $xx - 2xy + yy - 3a$. И такъ сїи двѣ формулы квадратами еще здѣлать надлежитъ: I) $xy + a = pp$; II) $(x-y)^2 - 3a$: корень послѣдней пусть будетъ $(x-y)$

$-q$

$-q$, и получится $(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q(x-y)+qq$ откуда $-3a=-2q(x-y)+qq$; потомъ $x-y=\frac{qq+3a}{2q}$, или $x=y+\frac{qq+3a}{2q}$, слѣдов. $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$. Возми $p=y+r$, и будетъ $2ry+rr=\frac{qq+3a}{2q}y+a$, или $4qry+2qrr=(qq+3a)y+2aq$, или $2qrr-2aq=(qq+3a)y-4qry$, и $y=\frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, гдѣ q и r по изволенію взять можно, и дѣло состоитъ только въ томъ, чтобъ вмѣсто x и y цѣлыя вышли числа. Когда $p=y+r$, то z и r будутъ также цѣлыя, и главное дѣло зависитъ здѣсь отъ свойства даннаго числа a, гдѣ затрудненіе для цѣлыхъ чиселъ быть можетъ; но надлежитъ примѣчать, что сіе рѣшеніе чрезъ то весьма ограничено: ибо когда буквамъ x и y знаменованія даны $x+y=\pm 2p$, хотя бы они и могли имѣть другія знаменованія. На сей конецъ хотимъ мы надъ симъ вопросомъ учинить слѣдующее разсужденіе, которое

и

и въ другихъ случаяхъ свою пользу имѣть можетъ.

I. Ежели $xy+a$ должно быть квадратъ, и слѣд. $xy=pp-a$, то числа x и y завсегда въ подобной формулѣ $rr-ass$ содержатся; и такъ положивъ $x=bb-acc$ и $y=dd-ae$: будетъ $xy=(bd-ace)^2-a(be-cd)^2$. Естьли теперь $be-cd=\pm 1$, то $xy=(bd-ace)^2$; по чему $xy+a=(bd-ace)^2$

II. Положимъ еще $z=ff-agg$, и возмемъ числа f и g такого состоянія, чтобъ $bg-cf=\pm 1$, также $dg-ef=\pm 1$, то формулы $xz+a$ и $yz+a$ будутъ квадратами, и дѣло состоитъ въ нахожденіи такихъ вмѣсто b и c, d и e также f и g чиселъ, чтобъ предписанное свойство исполнилось.

III. Сіи 3 пары буквъ хотимъ мы представить дробями яко $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, которые такого свойства быть долженствуютъ, чтобъ разность между каждою парою изъявить можно было одною дробью, коей числитель 1: ибо когда

когда $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ce}$, гдѣ числитель, какъ мы видѣли, долженъ быть ± 1. Здѣсь можно взять одну изъ сихъ дробей по изволенїю, а къ ней легко найти другую, которая бы помянутое свойство имѣла. Пусть будетъ на прим. первая $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, то другая $\frac{d}{e}$ сей почти должна быть равна; пусть $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, то разность будетъ $= \frac{1}{6}$. Сїю вторую дробь можно также вообще опредѣлить изъ первой; ибо когда $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e-2d}{2e}$, то надлежитъ быть $3e-2d = 1$, слѣдов: $2d = 3e-1$ и $d = e + \frac{e-1}{2}$, чего ради возми $\frac{e-1}{2} = m$, или $e = 2m+1$ и получится $d = 3m+1$, а наша вторая дробь будетъ $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Равнымъ образомъ къ каждой первой дроби можно сыскать другую, чему слѣдующїе прилагаемъ примѣры:

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$

$\frac{b}{c}=$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e}=$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+1}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Нашедъ двѣ такіе дроби вмѣсто $\frac{b}{c}$ и $\frac{d}{e}$ легко къ нимъ сыскать третью $\frac{f}{g}$, которая съ двумя прежними въ равномъ стоитъ содержаніи: ибо надлежитъ только взять $f=b+d$ и $g=c+e$ такъ что $\frac{f}{g}=\frac{b+d}{c+e}$ и изъ первыхъ двухъ $be-cd=\pm 1$ будетъ $\frac{f}{g}-\frac{b}{c}=\frac{\pm 1}{cc+ce}$, подобнымъ образомъ третья безъ второй $\frac{f}{g}-\frac{d}{e}=\frac{be-cd}{ee+ce}=\frac{\pm 1}{ee+ce}$

V. Когда же найдены 3 такіе дроби $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, то можно заразъ рѣшить нашъ вопросъ для 3 хъ чиселъ $x.y$, и z, такъ что 3 формулы $xy+a$, $xz+a$ и $yz+a$ будутъ квадратами; ибо надлежитъ только взять $x=pp-acc$, $y=dd-aee$ и $y=ff-agg$. Возми наприм. изъ прежней таблички $\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$ и $\frac{d}{c}=\frac{7}{4}$, будетъ $\frac{f}{g}=\frac{12}{7}$, слѣд. $x=25-9a$, $y=49-16a$, $z=144-49a$,

 и пол-

и получ. $xy+a=1225-840a+144aa=(35-12a)^2$
потомъ $xz+a=3600-2520a+441aa=(60-21a)^2$
и $yz+a=7056-4704a+784aa=(84-28a)^2$.

1036.

Когда же по силѣ вопроса надлежитъ найти 4 такія числа x, y, z и v, то должно къ первымъ тремъ дробямъ присовокупить еще четвертую, и по сему пусть будутъ 3 первые $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g}=\frac{b+d}{c+e}$; возьми четвертую дробь $\frac{h}{k}=\frac{d+f}{e+g}=\frac{2d+b}{2e+c}$ такъ чтобъ оная со второю и третьею въ надлежащемъ была содержаніи. Ежели теперь возмешь $x=bb-acc$, $y=dd-aee$, $z=ff-agg$ и $v=hh-akk$, то слѣдующіе обстоятельства исполнятся: I) $xy+a=\square$, II) $xz+a=\square$; III) $yz+a=\square$, IV) $yv+a=\square$; V) $zv+a=\square$, и такъ осталось еще, чтобъ $xv+a$ было также квадратное число, которое само собою не сдѣлается, потому что первая дробь съ четвертою не стоитъ въ надлежащемъ содержаніи и для того въ первыхъ трехъ дробяхъ

дробяхъ надлежитъ удержать неопредѣленное число m, и оное опредѣлить такъ, чтобъ $xv+a$ было также квадратъ.

VI. Взявъ изъ прежней таблички первой случай положи $\frac{b}{c}=\frac{1}{1}$, $\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$ и будетъ $\frac{f}{g}=\frac{3m+4}{2m+3}$, а $\frac{h}{k}=\frac{6m+5}{4m+4}$, отсюда $x=9-4a$ и $v=(6m+5)^2-a(4m+4)^2$ слѣдов. $xv+a=9(6m+5)^2-9a(4m+4)^2$
$+4aa(4m+4)^2$; $-4a(6m+5)^2$
$+a$

или $xv+a=9(6m+5)^2-a(288mm+528m+243)+4aa(4m+4)^2$, что легко квадратомъ сдѣлать можно: потому что mm помноженъ на квадратъ, но мы при семъ медлить не будемъ.

VII. Можно также сiи дроби, какiе здѣсь потребны, изъявить вообще. Пусть будетъ $\frac{b}{c}=\frac{I}{1}$ $\frac{d}{e}=\frac{nI-1}{n}$, то $\frac{f}{g}=\frac{nI+I-1}{n+1}$ и $\frac{h}{k}=\frac{2nI+I-2}{2n+1}$; поставь въ послѣдней вмѣсто $2n+1=m$, будетъ

детъ оная $\frac{Im-2}{m}$, а изъ первой $x = II - a$, изъ послѣдней $v = Im - 2 - amm$ и осталось только чтобъ $2v + a$ квадратомъ было. Понеже $v = (II-a) mm - 4Im + 4$, слѣдов $2v + a = (II-a)^2 mm - 4(II-a) Im + 4II - 3a$, что должно быть квадратомъ, коего корень положи $(II-a)m - p$; сего квадратъ $(II-a)^2 mm - 2(II-a)mp + pp$, откуда получаемъ мы $-4(II-a)Im + 4II - 3a = -2(II-a)mp + pp$ и $m = \frac{pp - 4II + 3a}{(II-a)(2p-4I)}$; взявъ $p = 2I + q$ будетъ $m = \frac{4Iq + qq + 3a}{2q(II-a)}$, гдѣ вмѣсто I и q произволящія брать можно числа.

Ежели бы наприм. было $a = 1$, то возьми $I = 2$, и будетъ $m = \frac{4q + qq + 3}{6q}$, положивъ $q = 1$ получится $m = \frac{4}{3}$ и $m = 2n + 1$; но здѣсь мы медлить не будемъ, а приступимъ къ слѣдующему вопросу.

1037.

1037.

Вопросъ. Требуются такія 3 числа x, y и z, чтобы какъ сумма, такъ и разность каждыхъ двухъ была квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ должны быть квадратами: I) $x+y$; II) $x+z$; III) $y+z$; IV) $x-y$; V) $x-z$; VI) $y-z$.

Начни съ послѣднихъ трехъ и положи $x-y=pp$, $x-z=qq$ и $y-z=rr$, то изъ послѣднихъ двухъ получимъ $x=qq+z$, а $y=rr+z$, откуда $x-y=qq-rr=pp$, или $qq=pp+rr$, такъ что сумма квадратовъ $pp+rr$ должна быть квадратъ, а имянно qq; что учинится взявъ $p=2ab$ и $r=aa-bb$: ибо тогда $q=aa+bb$, но мы здѣсь оставимъ буквы p, q и r, и разсмотрѣвъ три первые формулы найдемъ во первыхъ $x+y=qq+rr+2z$; во вторыхъ $x+z=qq+2z$; въ третьихъ $y+z=rr+2z$. Положи за первую $qq+rr+2z=tt$, то $2z=tt-qq-rr$; потомъ сіи двѣ формулы квадратами дѣлать надлежитъ: $tt-rr=\square$ и $tt-qq=\square$, т. е. $tt-(aa+bb)^2=\square$ и $tt-(aa-bb)^2=\square$, которые получатъ такой видъ $tt-a^4-b^4-2aabb$ и $tt-a^4-b^4+2aabb$;

но понеже какъ $cc+dd+2cd$, такъ и $cc+dd-2cd$ суть квадраты, то видно, что наше намѣренїе исполнится, когда мы $tt-a^4-b^4$ съ $cc+dd$ и $2aabb$ съ $2cd$ уравнимъ; а для произведенїя сего въ дѣйство положимъ $cd=aabb=ffgghhkk$ и возмемъ $c=ffgg$, $d=hhkk$, $aa=ffhh$ и $bb=ggkk$, или $a=fh$ и $b=gk$, по чему первое уравненїе $tt-a^4-b^4=cc+dd$ получитъ такой видъ $tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4$, слѣдов. $tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4$, т. е. $tt=(f^4+k^4)(g^4+h^4)$. Сїе произведенїе должно быть квадратъ, которой разрѣшить трудно: для того возмемъ другой способъ и изъ трехъ первыхъ уравненїй $x-y=pp$, $x-z=qq$ и $y-z=rr$ опредѣлимъ y и z, которыя будутъ $y=x-pp$, а $z=x-qq$, такъ что $qq=pp+rr$. Первые формулы будутъ $x+y=2x-pp$, $x+z=2x-qq$ и $y+z=2x-pp-qq$. Вмѣсто сей послѣдней положи $2x-pp-qq=tt$, такъ что $2x=tt+pp+qq$, и останется только формулы $tt+qq$ и $tt+pp$ сдѣлать квадратами. Но должно быть $qq=pp+rr$, то возми

$q=aa$

$q = aa + bb$ и $p = aa - bb$, будетъ $r = 2ab$; по чему наши формулы будутъ

I) $tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$

II) $tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square$.

Уравнимъ теперь опять $tt + a^4 + b^4$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$, то намѣренiе наше изполнится. Положивъ какъ и прежде $c = ffgg$, $d = hhkk$, $a = fh$ и $b = gk$ будетъ $cd = aabb$ и надлежитъ еще быть $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; оттуда слѣдуетъ $tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$, и все дѣло состоитъ въ нахожденiи двухъ такихъ разностей между двумя биквадратами, какъ $f^4 - k^4$ и $g^4 - h^4$, которые бы помноживъ одну на другую произвели квадратъ.

На сей конецъ разсмотримъ формулу $m^4 - n^4$ и поглядимъ какiя оттуда выдутъ числа, ежели вмѣсто m и n возьмутся данныя числа, и сверьхъ сего особливо примемъ въ разсужденiе квадраты въ нихъ содержащiеся. Понеже $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, то сдѣлаемъ оттуда слѣдующую табличку.

Таблица

$mm = 4$ $nn = 1$	9 1	9 4	16 1	16 9	25 1	25 9	49 1	49 16
$mm - nn = 3$ $mm + nn = 5$	8 10	5 13	15 17	7 25	24 26	16 2.17	48 50	33 65
$m^4 - n^4 = 3.5$	8.10 или 16.5	13.5	5.3.7 или 3.5.17	25.7	8.3.2.13 или 16.[illegible].13	16.2.17	16.3.2.25 или 16.25.3.2	3.11.5.13

$mm = 64$ $nn = 1$	81 49	121 4	121 9	121 49	144 25	169 1	169 81	225 64
$mm - nn = 63$ $mm + nn = 5.13$	32 2.5.13	9.13 25.5	16.7 2.5.13	8.9 2.5.17	7.17 169	8.3.7 2.5.17	8.11 25.2.5	7.23 289
$m^4 - n^4 = 9.$ [illegible] 3	64.5.13	9.25.5.13	16.7.7.5.13	16.9.5.17	169.7.17	16.3.5.7.17	16.25.5.11	289.7.23

Изъ сего уже можемъ мы дать нѣкоторыя рѣшенія, а имянно: взявъ $ff=9$ и $kk=4$ будетъ $f^4-k^4=13.5$; потомъ $gg=81$ и $hh=49$, получится $g^4-h^4=64.5.13$, откуда $tt=64.25.169$, слѣдов. $t=520$; но когда $tt=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$ и $h=7$, то получится $a=21$ и $b=18$; откуда $p=117$, $q=765$ и $r=756$; а изъ сего найдется $2x=tt+pp+qq=869314$, слѣдов. $x=434657$, потомъ $y=x-pp=420968$, и наконецъ $z=x-qq=-150568$, которое число можно взять положительнымъ: потому что сумма въ разность обратно перемѣнится; и такъ наши искомыя числа суть слѣдующія:

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

чего ради $x + y = 855625 = (925)^2$
$x + z = 585225 = (765)^2$
$y + z = 571536 = (756)^2$

потомъ $x - y = 13689 = (117)^2$
$x - z = 284089 = (533)^2$
$y - z = 270400 = (520)^2$

Другія еще числа найти можно изъ прежней таблички. Такъ когда положимъ $ff = 9$, $kk = 4$, $gg = 121$ и $bb = 4$, то будетъ $tt = 13\ 5.5.13\ 9.25 = 9.25.25.169$, такъ что $t = 3.5\ 5.13 = 975$; а понеже $f = 3$; $g = 11$. $k = 2$ и $b = 2$, то найдется $a = fb = 6$ и $b = gk = 22$; отсюда $p = aa - bb = -448$ и $q = aa + bb = 520$, а $r = 264$. Чего ради получится $2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, слѣдоват. $x = \frac{1421729}{2}$ отсюда $y = x - pp = \frac{1020321}{2}$ и $z = x - qq = 880929$. Теперь надлежитъ примѣчать, что ежели сіи числа желаемое свойство имѣютъ, то оныя будучи помножены на каждой

квад-

квадратъ, должны удержать сїе свойство; и такъ взявъ найденныя числа четырежды, слѣдующїя 3 числа удовлетворяютъ: $x=2843458$; $y=2040642$ и $z=1761858$, кои больше нежели предъидущїя, такъ что тѣ за самыя меньшїя возможныя почесться могутъ.

1038.

Вопросъ. Требуются 3 квадратныя числа, чтобъ разность между двумя каждыми была квадратъ? Прежнее рѣшенїе служитъ также и къ сему вопросу; ибо когда x, y и z такїя суть числа, что сїи формулы будутъ квадратами: I) $x+y$; II) $x-y$; III) $x+z$; IV) $x \; z$; V) $y+z$; VI) $y-z$; то произведенїе изъ первой и второй $xx-yy$ также квадратъ. Равнымъ образомъ произведенїе изъ третей и четвертой $xx-zz$, и наконецъ изъ пятой и шестой $yy-zz$ будутъ также квадратами слѣдов. 3 искомые здѣсь квадрата будутъ xx, yy и zz; но понеже сїи числа будутъ очень велики, то безъ сомнѣнїя также есть гораздо меншїя: потому что для сдѣланїя $xx-yy$ квадратомъ не нужно, чтобъ

чтобъ $x+y$ и $x-y$ каждое особливо было квадратъ, затѣмъ что 25−9 есть квадратъ хотя 5+3, ниже 5−3 не квадраты. Сего ради хотимъ мы рѣшить сей вопросъ особливо, и притомъ во первыхъ примѣчать, что вмѣсто одного квадрата можно взять 1 цу. Когда $xx-yy$, $xx-zz$ и $yy-zz$ квадраты, то будутъ они также квадратами ежели на zz раздѣлятся; и по сему надлежитъ сдѣлать квадратами сіи формулы: $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\square$; $\frac{xx}{zz}-1=\square$ и $\frac{yy}{zz}-1=\square$. Все дѣло состоитъ въ сихъ двухъ дробяхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$; взявъ $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ и $y=\frac{qq+1}{qq-1}$, послѣднія два обстоятельства исполнятся и будетъ $\frac{xx}{zz}-1=\frac{4pp}{(pp-1)^2}$, а $\frac{yy}{zz}-1=\frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Теперь осталось только первую формулу сдѣлать квадратомъ, которая есть $\frac{xx}{zz}-\frac{yy}{zz}=\frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2}-\frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2}=\left(\frac{pp+1}{pp-1}+\frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1}-\frac{qq+1}{qq-1}\right)$. Первой множитель будетъ

детЂ здѢсь $=\frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$; а другой $=2$ $\frac{(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, коихЂ произведенїе $=\frac{4(ppqq-1)}{(pp-1)^2}\cdot$ $\frac{(qq-pp)}{(qq-1)^2}$. Понеже знаменатель уже квадратЂ и числитель помноженЂ на квадратЂ 4, то надлежитЂ только сдѢлать квадратомЂ сїю формулу $(ppqq-1)(qq-pp)$, или также сїю $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$, что учинится, когда возмется $pq=\frac{ff+gg}{2fg}$ и $\frac{q}{p}=$ $\frac{hh+kk}{2hk}$, а понеже тогда каждой множитель будетЂ квадратЂ- $qq=\frac{ff+gg}{2fg}\cdot\frac{hh+kk}{2hk}$, то сїи обѢ дроби помноживЂ одну на другую должны произвесть квадратЂ, и слѢдовательно также ежели онѢ помножатся на $4ffgghhkk$ т. е. $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$, которыя формулы сЂ прежними во всемЂ сходны.

ПоложивЂ $f=a+b$, $g=a-b$, $h=c+d$ и $k=c-d$ выдетЂ $2(a^4-b^4).2(c^4-d^4)=4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, что учинится, какЂ мы видѢли, ежели $aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ и $dd=49$; или $a=3$, $b=2$, $c=9$ и $d=7$; откуда $f=5$, $g=1$, $h=16$

$b=16$ и $k=2$; по чему $pq=\frac{13}{5}$ и $\frac{q}{p}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16}$.

Сіи два уравненія помноживъ между собою даютъ $qq=\frac{65.13}{16.5}=\frac{13.13}{16}$, слѣдов. $q=\frac{13}{4}$, и по сему $p=\frac{4}{5}$; отсюда $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=-\frac{41}{9}$ и $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}=\frac{185}{153}$; но $x=-\frac{41}{9}z$, то для нахожденія цѣлыхъ чиселъ, возми $z=153$, будетъ $x=-697$ и $y=185$, слѣд. 3 искомыя квадратныя числа будутъ слѣдующія:

$xx=485809$ будетъ $xx-yy=451584=(672)^2$
$yy=34225$ $yy-zz=10816=(104)^2$
$zz=23409$ $xx-zz=462400=(680)^2$

которые квадраты гораздо меньше, нежели какіе бы вышли, естьли бы взяли квадраты 3 хъ чиселъ x, y и z изъ прежняго вопроса.

1039.

Скажетъ нѣкто, что сіе рѣшеніе одною только пробою сыскано: ибо мы брали въ помощь прежнюю табличку; но мы сіе средство для того только употребляли, чтобъ самое меншее рѣшеніе найти. А ежели на то не смотрѣть, то помощію предписанныхъ правилъ безконечное множество рѣшеній найти можно;

а

а именно когда въ послѣднемъ вопросѣ, главное дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ произведеніе $(ppqq-1)(\frac{qq}{pp}-1)$ было квадратъ. Понеже тогда $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ и $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}$, то взявъ $\frac{q}{p}=m$, или $q=mp$ формула наша будетъ $(mmp^4-1)(mm-1)$, которая очевидно здѣлается квадратомъ, когда $p=1$ и сіе знаменованіе приведетъ насъ къ другимъ, естьли положимъ $p=1+s$; ибо тогда формула $(mm-1)(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$, слѣд. раздѣливъ на квадратъ $(mm-1)^2$ выдетъ $1+4\frac{mms}{mm-1}+6\frac{mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1}$. Взявъ ради краткости $\frac{mm}{mm-1}=a$; чтобъ формула $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ была квадратъ.

Положи ея корень $=1+fs+gss$, коего квадратъ есть $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$ и опредѣли f и g такъ чтобъ первые 3 члена уничтожились; что здѣлается, когда $4a=2f$, или $f=2a$, а $6a=2g+ff$, слѣд. $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$; остальные же два члена даютъ сіе уравненіе: $4a+as=2fg+ggs$, откуда найдется

ся

ся $s = \frac{4a-2fg}{gg-a} = \frac{4a-12aa+8a^3}{4a^4-12a^3+9aa-a}$ т. е. $s = \frac{4-12a+8aa}{4a^3-12aa+9a-1}$, которую дробь раздѣливъ на $a-1$ получится $s = \frac{4(2a-1)}{4aa-8a+1}$.
Сïе знаменованïе даетъ намъ безконечно много рѣшенïй, потому что число m, изъ котораго производитъ $a = \frac{mm}{mm-1}$ по изволенïю взять можно, что мы изъяснить примѣрами намѣрены.

I. Пусть $m=2$, будетъ $a=\frac{4}{3}$; почему $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$, откуда $p = -\frac{37}{23}$ и $q = -\frac{74}{23}$; наконецъ $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$ и $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Пусть $m=\frac{3}{2}$ будетъ $a=\frac{9}{5}$ и $s = 4\frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{25}} = -\frac{260}{11}$, слѣдов. $p = -\frac{249}{11}$ и $q = \frac{747}{22}$, откуда найдутся дроби $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

Одинъ особливо случай достоинъ примѣчанïя, когда a будетъ квадратъ; что учинится еже́ли $m=\frac{5}{3}$, ибо тогда $a=\frac{25}{16}$;
положи

положи ради краткости $a=bb$ такъ что наша формула будетъ $1+4bbs+6bbss+4bbs^3+bbs^4$, коей корень пусть будетъ $1+2bbs+bss$, котораго квадратъ есть $1+4bbs+2bss+4b^4ss+4b^3s^3+bbs^4$; гдѣ два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на ss дають $6bb+4bbs=2b+4b^4+4b^3s$; откуда

$$s=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3bb-b-2b^4}{2b^3-2bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b},$$

которая дробь еще на $b-1$ раздѣлится и выдетъ $s=\frac{1-2b-2bb}{2b}$ и $p=\frac{1-2bb}{2b}$. Можно бы было корень прежней формулы положить $1+2bs+bss$; коего квадратъ $1+4bs+2bss+4bbss+4bbs^3+bbs^4$, гдѣ первые и два послѣдніе члена уничтожаются; а остальные раздѣливъ на s дають $4bb+6bbs=4b+2bs+4bbs$, откуда $s=-2$ и $p=-1$, слѣдоват. $pp-1=0$; но изъ сего ничего не найдется: ибо былъ бы $z=0$. Въ прежнемъ случаѣ, гдѣ $p=\frac{1-2bb}{2b}$, ежели $m=\frac{5}{3}$, то $a=\frac{25}{16}=bb$ и $b=\frac{5}{4}$, отку-

откуда выдетъ $p = \frac{17}{20}$ и $q = mp = \frac{17}{12}$, а изъ сего $\frac{x}{z} = \frac{689}{111}$, и $\frac{y}{z} = \frac{433}{145}$.

1040.

Вопросъ. Найти 3 квадрата xx, yy и zz, коихъ бы сумма каждыхъ двухъ была паки квадратъ?

Понеже сïи 3 формулы $xx + yy$, $xx + zz$ и $yy + zz$ должны быть квадратами, то раздѣливъ оные на zz получатся слѣдующïе 3 квадрата: I) $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square$; II) $\frac{xx}{zz} + 1 = \square$; III) $\frac{yy}{zz} + 1 = \square$. Двѣ послѣднïе формулы разрѣшатся, когда возмется $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$, по чему первая будетъ $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, которую помноживъ на 4 надлежитъ выйти квадрату т. е. $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$, или помноживъ также на $ppqq$

будетъ

будетъ $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, что иначе учиниться не можетъ прежде нежели не будетъ извѣстенъ случай, въ которомъ сія формула квадратъ; но такой случай не скоро отгадать можно, чего ради къ другимъ пріемамъ прибѣгнуть надлежитъ, изъ коихъ нѣкоторые мы здѣсь покажемъ.

I. Понеже реченную формулу изъявить можно такъ: $qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$, то здѣлай чтобъ ея на квадратъ $(p-1)^2$ раздѣлить можно было, полагая $q-1=p+1$, или $q=p+2$, будетъ $q+1=p+3$, слѣдов. наша формула $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square$, которую раздѣливъ на $(p+1)^2$ долженъ выттти квадратъ, а имянно $(p+2)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2$, которой изъявляется въ сей формулѣ $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Понеже здѣсь послѣдней членъ квадратъ, то положи корень $2+fp+gpp$, или $gpp+fp+2$, котораго квадратъ есть $ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$, гдѣ f и g такъ

должно опредѣлить чтобъ 3 послѣдніе члена уничтожилися; что учинится, когда $-4=4f$, или $f=-1$, а $6=4g+1$, или $g=\frac{5}{4}$; и тогда два первые члена раздѣливъ на p^3 даютъ $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, откуда $p=-24$, $q=-22$, а изъ сего найдется $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$, или $x=-\frac{575}{48}z$, и $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$, или $y=-\frac{483}{44}z$.

Взявъ $z=16.3.11$ будетъ $x=575.11$, а $y=483.12$, по чему 3 хъ искомыхъ квадратовъ корни будутъ слѣдующіе.

$x=6325=11.23.25$ отсюда $xx+yy=23^2(275^2+252^2)=23^2.373^2$

$y=5796=12.21.23$ $\quad xx+zz=11^2(575^2+48^2)=11^2.577^2$

$z=528=3.11.16$ $\quad yy+zz=12^2(483^2+44^2)=12^2.485^2$

II. безконечно многими способами можно сію формулу раздѣлить на квадраты; положивъ наприм. $(q+1)^2=4(p+1)^2$, или $q+1=2(p+1)$ т. е. $q=2p+1$ и $q-1=2p$, наша формула будетъ $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp.4(p+1)^2 4pp=\square$, раздѣливъ на $(p+1)^2$ получимъ $(2p+1)^2(p-1)^2$

$+16$

$+16p^4 = \square$, или $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1$
$= \square$, но отсюда ничего найти не льзя.

III. Взявъ $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, или $q-1 = 2(p$
$+1)$ будетъ $q = 2p+3$ и $q+1 = 2p+4$,
или $q+1 = 2(p+2)$, по чему формулу
нашу раздѣливъ на $(p+1)^2$ получится
$(2p+3)^2(p-1)^2 + 16pp(p+2)^2$ т. е. $9-6p$
$+53pp + 68p^3 + 20p^4$; сей формулы
положи корень $= 3-p+gpp$, котораго
квадратъ есть $9-6p+6gpp+pp-2gp^3$
$+ggp^4$; для уничтоженія 3 членовъ
возми $53 = 6g+1$ будетъ $g = \frac{26}{3}$, а оста-
вшіеся члены раздѣливъ на p^3 дадутъ
$20p+68 = ggp-2g = \frac{676}{9} - \frac{25}{3}$, или $\frac{496}{9}p = \frac{256}{3}$,
по чему $p = \frac{[illegible]}{31}$ — и — $q = 1\frac{89}{31}$, откуда паки
рѣшеніе слѣдуетъ.

IV. Положивъ $q-1 = \frac{4}{3}(p-1)$ будетъ $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$
и $q+1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1)$, и формулу на-
шу раздѣливъ на $(p-1)^2$ получится $\frac{(4p-1)^2}{9}$
$(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2$; помноживъ на
81 выдетъ $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2$
$= 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9$, гдѣ
какъ первой, такъ и послѣдній членъ
квадраты: для того возми корень =
$20pp$

$20pp-9p+3$, котораго квадратъ есть $400p^4-360p^3+81pp+120pp-54p+9$ и получится $472p+73=-360p+201$, слѣдов. $p=\frac{2}{13}$ и $q=\frac{8}{39}-\frac{1}{3}$.

Можно также вмѣсто прежняго корня положить $20pp+9p-3$, котораго квадратъ $400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9$ сравнивъ съ нашею формулу дастъ $472p+73=360p-39$; слѣдов. $p=-1$: но сїе знаменованїе ни малой пользы не приноситъ.

V. Можно также зделать, что формула наша на оба квадрата $(p+1)^2$, и $(p-1)^2$ раздѣлится. На сей конецъ возми $q=\frac{pt+1}{p+t}$, и будетъ $q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$, и $q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$; отсюда раздѣливъ нашу формулу на $(p+1)^2(p-1)^2$ выдетъ $\frac{(pt+1)}{(p+t)^2}+\frac{pp(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, помноживъ на квадратъ

ратъ $(p+t)^4$ будетъ еще квадратъ, а имянно: $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$, или $ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+2t(tt+1)p$ $+(tt+1)^2pp+pp(tt-1)^2$ $+tt$, гдѣ какъ первой, такъ и послѣдней членъ квадраты. Положивъ корень $=tpp+(tt+1)p-t$, котораго квадратъ $ttp^4+2t(tt+1)p^3-2ttpp-2t(tt+1)$ $+(tt+1)^2pp$ $p+tt$ и сравнивъ съ нашею формулою будетъ $2ttp+(tt-1)^2p+2t(tt+1)$ $=-2ttp-2t(tt+1)$, или $4ttp+(tt-1)^2p+4t(tt+1)=0$, или $(tt+1)^2p+4t(tt+1)=0$, т. е. $tt+1=-\frac{t}{p}$; откуда $p=\frac{-4t}{tt+1}$, $pt+1=\frac{-3tt+1}{tt+1}$ и $p+t=\frac{t^3-3t}{tt+1}$, слѣдов. $q=\frac{-3tt+1}{t^3-3t}$, гдѣ t по изволенію взять можно. Пусть будетъ на прим. $t=2$, будетъ $p=-\frac{8}{5}$ и $q=-\frac{11}{2}$, откуда найдемъ $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{39}{80}$ и $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}$ $=-\frac{117}{44}$; слѣдов. $x=\frac{3.13}{4.4.5}z$, а $y=\frac{9.13}{4.11}z$. Возми теперь $z=4.4.5.11$, выдетъ $x=3.13.11$ и $y=4.5.9.13$; почему трехъ искомыхъ квадратовъ корни $x=3.11.13=429$, $y=$

 4.

$4.5.9.13=2340$ и $z=4.4.5.11=880$, кои еще менше прежде найденныхъ.

А отсюда $xx+yy=3^2.13^2(121+3600)=3^2.13^2.61^2$

$$xx+zz=11^2(1521+6400)=11^2.89^2$$

$$yy+zz=20^2(13689+1936)=20^2.125^2.$$

VI. На конецъ примѣчаемъ мы при семъ вопросѣ, что изъ каждаго рѣшенія еще другое найти можно: ибо когда сысканы сіи знаменованія $x=a$, $y=b$ и $z=c$ такъ что $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$ и $bb+cc=\square$, то слѣдующія величины удовлетворяютъ $x=ab$, $y=bc$ и $z=ac$, откуда

$$xx+zz=aabb+aacc=aa(bb+cc)=\square$$

$$xx+yy=aabb+bbcc=bb(aa+cc)=\square$$

$$yy+zz=aacc+bbcc=cc(aa+bb)=\square$$

Но когда уже мы нашли $x=a=3.11.13$; $y=b=4.5.9.13$ и $z=c=4.4.5.11$, то получимъ оттуда слѣдующія рѣшенія:

$x=ab$

$$x = ab = 3.4.5.9.11.13.13$$

$$y = bc = 4.4.4.5.5.9.11.13$$

$$z = ac = 3.4.4.5.11.11.13$$

кои всѣ 3 могутъ раздѣлиться на 4.5. 11.13.3 и слѣдов. въ сіи формулы сокращены будутъ $x = 9.13$, $y = 3.4.4.5$ и $z = 4.11$, то есть: $x = 117$, $y = 240$ и $z = 44$, кои еще меньше прежнихъ, и по сему

$$xx + yy = 71289 = (267)^2$$

$$xx + zz = 15625 = (125)^2$$

$$yy + zz = 56536 = (244)^2.$$

1041.

Вопросъ. Требуются два числа x и y, такъ что ежели одно придашь къ квадрату другаго, тобъ вышелъ квадратъ, или сіи двѣ формулы $xx + y$ и $yy + x$ должны быть квадратами?

Когда положимъ первую $xx + y = pp$, и найдемъ оттуда $y = pp - xx$, то другая формула $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$, коей рѣ-

шенїе не легко усмотрѣть можно. Но положивъ для обѣихъ формулъ $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$ и $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, получимъ заразъ сїи два уравненїя: I) $y+2px=pp$; II) $x+2qy=qq$, изъ которыхъ x и y найти не трудно, а имянно: $x=\frac{2qpp-qq}{4pq-1}$ и $y=\frac{2pqq-pp}{4pq-1}$, гдѣ p и q по изволенїю взять можно. Положи напр. $p=2$ и $q=3$, то получишь сїи два искомыя числа: $x=\frac{15}{23}$, и $y=\frac{32}{23}$ и тогда $xx+y=\frac{225}{529}+\frac{32}{23}=\frac{961}{529}=\left(\frac{31}{23}\right)^2$, а $yy+x=\frac{1024}{529}+\frac{15}{23}=\frac{1369}{529}=\left(\frac{37}{23}\right)$.[2] Возми по томъ $p=1$, $q=3$ и будетъ $x=-\frac{3}{11}$, а $y=\frac{17}{11}$; понеже здѣсь одно число отрицательное, и сего бы рѣшенїя может быть принять не похотѣли, то положи $p=1$ и $q=\frac{3}{2}$, будетъ $x=\frac{3}{20}$ $y=\frac{7}{10}$, и получится $xx+y=\frac{9}{400}+\frac{7}{10}=\frac{289}{400}=\left(\frac{17}{20}\right)^2$, а $yy+x=\frac{49}{100}+\frac{3}{20}=\frac{64}{100}=\left(\frac{8}{10}\right)^2$.

1042.

Вопросъ. Найти два числа, коихъ бы сумма была квадратъ, а сумма бы ихъ квадратовъ биквадратъ?

Пусть

Пусть будутъ сїи числа x и y, и
понеже $xx+yy$ долженствуетъ быть би-
квадратъ, то здѣлай оной прежде ква-
дратомъ; что учинится, ежели $x=pp$
$-qq$, $y=2pq$, и будетъ $xy+yy=(pp+qq)^2$. А
чтобы сїе было биквадратъ, то $pp+qq$
должно быть квадратомъ; чего ради
возми $p=rr-ss$, $q=2rs$, и выдетъ $pp+qq=$
$(rr+ss)^2$, откуда $xx+yy=(rr+ss)^4$, и слѣд. би-
квадратъ; но тогда будетъ $x=r^4-6rrss+s^4$,
$y=4r^3s-4rs^3$, и осталось только здѣлать
квадратомъ сїю формулу $x+y=r^4+4r^3s$ 6
$rrss-4rs^3+s^4$, коей корень положи $rr+2rs$
$+ss$; слѣдов. наша формула равна сему
квадрату $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$; гдѣ
первые и послѣднїе члены уничтожаются,
а остальные раздѣливъ на rss даютъ $6r$
$+4s=6r-4s$, или $12r+8s=0$; слѣд. $s=$
$-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}r$, или можно также взять корень
$rr-2rs+ss$, дабы четвертые члены уни-
чтожились; но понеже квадратъ сего
корня есть $r^4-4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, то
оставшїеся члены раздѣливъ на rrs да-
ютъ $4r-6s=-4r+6s$, или $8r=12s$, слѣд.
$r=\frac{3}{2}s$, и когда $r=3$, и $s=20$, то нашелся
бы

бы $x = -119$ отрицательной. Положимъ еще $r = \frac{3}{2}s + t$, то формула наша будетъ $rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt$; $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$

$$r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4$$

$$+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st$$

$$-6rrss = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt$$

$$-4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t$$

$$+ s^4 = + s^4$$

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{37}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$, которая формула должна быть квадратъ, и слѣд. также когда помножится на 16, т. е. $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$, коея корень положи $= ss + 148st - 4tt$, котораго квадратъ есть $s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$. Здѣсь два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на stt даютъ $21896s - 1184t = 408s + 160t$, слѣдов. $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Взявъ $s = 84$ и $t = 1343$ будетъ $r = 1469$; а изъ сихъ чиселъ $r = 1469$ и $s = 84$ найдемъ $x = r^4 - 6rrs + s^4 = 4565486027761$ и $y = 1061602293520$.

ГЛАВА

ГЛАВА XV.

О разрѣшеніи вопросовъ, въ которыхъ требуются кубы.

1043.

Въ прежней главѣ были такіе вопросы, гдѣ нѣкоторые формулы должно было дѣлать квадратами и гдѣ мы довольно имѣли случай изъяснить разные пріемы, помощію коихъ данныя правила въ дѣйство произвесть можно. Теперь осталось еще разсмотрѣть такіе вопросы, гдѣ нѣкоторые формулы надлежитъ дѣлать кубами, къ чему показаны уже въ прежней главѣ правила, кои чрезъ рѣшенія нижеслѣдующихъ вопросовъ большее изъясненіе получатъ.

1044.

Вопросъ. Найти два куба x^3 и y^3, которыхъ бы сумма была также кубъ?

Когда

Когда x^3+y^3 надлежитъ быть кубомъ, то формула сія раздѣленная на кубъ y^3 должна также кубомъ остаться, т. е $\frac{x^3}{y^3}+1$. Положивъ $\frac{x}{y}=z-1$ получится $z^3-3zz+3z$; что долженствуетъ быть кубомъ. По прежнимъ правиламъ можно взять кубичной корень $=z-u$, коего кубъ есть $z^3-3uzz+3uuz-u^3$ и опредѣлить u такъ чтобъ вторые члены уничтожились; тогда было бы $u=1$, а остальные члены дали бы $3z=3uuz-u^3=3z-1$, откуда найдется z безконечной; но сіе знаменованіе намъ ни мало не служитъ. Оставивъ u неопредѣленнымъ получится сіе уравненіе $-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3$; и изъ сего квадратнаго уравненія опредѣлится величина числа x, а имянно: $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3=3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, или $zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)}$, слѣдов. $z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}\right)}=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}\right)}$. И такъ

все

все дѣло вЪ томЪ состоитЪ, чтобЪ сїю дробь дѣлать квадратомЪ: сего ради помножимЪ дробь вверьху и внизу на $3(u-1)$ дабы знаменатель вышелЪ квадратЪ, а имянно $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, коей дроби числитель долженЪ быть квадратЪ, гдѣ послѣдней членЪ уже квадратЪ. Возьми теперь по прежнимЪ правиламЪ корень $=3+fu+guu$, или $guu+fu+3$, котораго квадратЪ есть $ggu^4+2fgu^3+6guu+ffuu+2fu+9$ и здѣлай чтобЪ 3 послѣднїе члены уничтожились, то произойдетЪ во первыхЪ $0=2f$, т. е. $f=0$, а по томЪ $6g+ff=-18$, по чему $g=3$; первые же два члена раздѣливЪ на u^3 даютЪ $-3u+12=ggu+2fg=ggu$, слѣдов. $u=1$, которое знаменованїе ни кЪ чему насЪ не приведетЪ. ПоложивЪ $u=1+t$, формула наша будетЪ $-12t-3t^4$, которая должна быть квадратЪ, чему статься не льзя, ежели t не будетЪ отрицательнымЪ; и такЪ пусть $t=-s$, формула наша выдетЪ $12s-3s^4$, которая, когда $s=1$ будетЪ квадратЪ, но тогда бы нашлось $t=-1$

и

и $u=0$, откуда ничего найти не льзя. Но какъ бы мы за сїе дѣло ни принимались, то никогда не найдемъ такого знаменованїя, которое бы насъ привело къ нашему намѣренїю, и отсюда заподлинно заключить можно, что не льзя найти двухъ кубовъ, которыхъ бы сумма была кубъ. Сїе можно доказать слѣдующимъ образомъ.

1045.

Θеорема. Не возможно найти двухъ кубовъ, коихъ бы сумма, или разность была кубъ. Здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что ежели сумма не возможна, то и разность также не возможна быть должна. Ибо когда не льзя чтобъ $x^3+y^3=z^3$, то не возможно также, чтобъ и $z^3-y^3=x^3$, а z^3-y^3 есть разность двухъ кубовъ. И такъ довольно показать невозможность изъ одной только суммы, или изъ одной разности, по тому что одна изъ другой слѣдуетъ. Самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положенїяхъ.

I.

I. Здѣсь можно принять, что числа x и y между собою недѣлимы: ибо ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы ихъ кубы на кубъ онаго могли раздѣлиться: такъ напримѣръ, когда $x = 2a$ и $y = 2b$, то бы $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$ и естьли бы сїя сумма была кубъ, то надлежало бы также и $a^3 + b^3$ быть кубомъ.

II. Когда же x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, то оба сїи числа или нечетныя, или одно четное, а другое нечетъ. Въ первомъ случаѣ должно бы быть z четное, въ другомъ же случаѣ нечетъ. И такъ изъ 3 хъ чиселъ x, y и z два завсегда нечетныя, а одно четное: чего ради возмемъ къ нашему доказательству оба нечетныя; ибо все равно покажемъ ли невозможность суммы, или разности, потому что сумма перемѣнится въ разность, когда корень будетъ отрицательнымъ.

III. По сему пусть будутъ x и y нечетныя числа, то какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ четная. Для того положи $\frac{x+y}{2}=p$, $\frac{x-y}{2}=q$ и будетъ $x=p+q$ и $y=p-q$; откуда явствуетъ, что изъ двухъ чиселъ p и q одно четное, а другое нечетъ быть долженствуетъ. Чего ради $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$: и такъ надлежитъ доказать, что произведенiе $2p(pp+3qq)$ кубомъ быть не можетъ. Естли бы съ разности доказывать захотѣли, то было бы $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, которая формула съ прежнею весьма сходствуетъ: ибо переставлены только буквы p и q, по чему довольно показать невозможность формулы $2p(pp+3qq)$, понеже оттуда неотмѣнно слѣдуетъ, что ни сумма, ни разность двухъ кубовъ кубомъ быть не можетъ.

IV. Ежели бы $2p(pp+3qq)$ было кубъ, то былъ бы онъ четной, и слѣд. на 8 дѣлимой; по чему осьмая часть нашей фор-

формулы была бы цѣлое число, да притомЂ и кубичное; а имянно $\frac{p}{4}(pp+3qq)$; но понеже изЂ чиселЂ p и q одно четное, а другое нечетЂ, то $pp+3qq$ будетЂ нечетЂ и на 4 раздѣлиться не можетЂ, откуда слѣдуетЂ, что p на 4 дѣлимо, и слѣдов. будетЂ цѣлое число.

V. Понеже произведенie $\frac{p}{4}(pp+3qq)$ должно быть кубЂ, то каждой множитель порознь $\frac{p}{4}$ и $pp+3qq$ долженствуютЂ быть кубы; а наипаче когда они общаго дѣлителя не имѣютЂ. Ибо ежели произведенie изЂ двухЂ недѣлимыхЂ между собою множителей должно быть кубЂ, то каждой самЂ по себѣ долженЂ быть кубЂ; когда же они общаго дѣлителя имѣютЂ, то оной надлежитЂ разсмотрѣть особливо; и такЂ здѣсь вопросЂ, могутЂ ли имѣть множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя; что разыскать должно. Ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы и сiи pp и $pp-3qq$ того же дѣлителя имѣли, и слѣдов. сихЂ

сихъ послѣднихъ разность $3qq$ съ pp того же бы самаго дѣлителя имѣли; но p и q между собою недѣлимы, то и числа pp и $3qq$ инаго общаго дѣлителя кромѣ 3хъ не имѣютъ; что дѣлается когда p на 3 дѣлится.

VI. Сего ради надлежитъ намъ рассмотрѣть два случая: первой когда множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ, что случается, когда p на 3 раздѣлиться не можетъ; а другой случай ежели они общаго дѣлителя имѣютъ, что бываетъ когда p на 3 дѣлимо. Сіи два случая съ осторожностію различать надлежитъ: потому что для каждаго особливое доказательство дать должно.

VII. *Первой случай.* Пусть будетъ p на 3 недѣлимо, и слѣд. наши оба множители $\frac{p}{4}$ и $pp+3qq$ между собою недѣлимы, то каждой самъ собою долженъ быть кубъ; и по сему здѣлаемъ $pp+3qq$ кубомъ, что учинится, ежели, какъ

какЪ выше показано, $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$, а $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$, и было бы $pp+3qq=(tt+3uu)^3$, слѣд. кубЪ; но отсюда $p=t^3-9tuu$ и $q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$. Понеже q есть нечетное число, то u должно быть также нечетЪ, а t четЪ: потому что иначе бы $tt-uu$ было бы четное число.

VIII. Понеже $pp+3qq$ кубомЪ здѣлано и найдено $p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, то надлежало бы также и $\frac{p}{4}$ быть кубомЪ, слѣдов. и $2p$; по чему сїя формула $2t(t+3u)(t-3u)$ должна быть кубЪ. Но здѣсь примѣчать надлежитЪ вопервыхЪ, что t четное число и на 3 недѣлимо: ибо вЪ противномЪ случаѣ было бы и p также на 3 дѣлимо, которой случай именно отсюда исключается; слѣдов. сїи 3 множителя $2t$, $t+3u$ и $t-3u$ между собою недѣлимы и для того каждой долженЪ быть кубЪ.

И такЪ положивЪ $t+3u=f^3$, $t-3u=g^3$ будетЪ $2t=f^3+g^3$; но теперь $2t$ есть также

также кубъ, и слѣдов. были бы здѣсь два куба f^3 и g^3, которыхъ бы сумма дѣлала кубъ, и кои были бы несравненно менше съ начала взятыхъ кубовъ x^3 и y^3: ибо когда положили мы $x=p+q$ и $y=p-q$, а теперь p и q опредѣлили буквами t и u, то числа p и q должны быть гораздо больше нежели t и u.

IX. По чему когда два такіе куба въ больших числахъ находятся, то можно бы было оные также изъявить въ гораздо меншихъ числахъ, которыхъ бы сумма была также кубъ; и такимъ бы образомъ можно было притти къ меншимъ такимъ кубамъ: но въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ заподлинно нѣтъ, то и въ большихъ числахъ оные невозможны. Сіе доказательство подкрѣпляется и тѣмъ, что другой случай ведетъ насъ къ тому же, какъ мы тотчасъ увидимъ.

X. *Другой случай.* Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ; положивъ $p=3r$ бу-

будетѣ формула наша $\frac{3r}{4}(9rr+3qq)$, или $\frac{9}{4}r(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы; потому что $3rr+qq$ ни на 2, ни на 3 не дѣлится: ибо r равнымѣ образомѣ четное число быть должно такѣ какѣ и p: чего ради каждой изѣ сихѣ двухѣ множителей самѣ по себѣ долженѣ быть кубѣ.

XI. Ежели мы другаго множителя $3rr+qq$ или, $qq+3rr$ здѣлаемѣ кубомѣ, то найдемѣ, какѣ и прежде $q=t(tt-9uu)$ и $r=3u(tt-uu)$, гдѣ надлежитѣ примѣчать, что когда q было нечетѣ, то здѣсь и t также нечетѣ, а u четное число быть надлежитѣ.

XII. Понеже $\frac{9r}{4}$ также должно быть кубѣ, и слѣдов. помноживѣ на кубѣ $\frac{8}{27}$ также, то $\frac{2r}{3}$ т. е. $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ надлежитѣ быть кубѣ, которые 3 множителя между собою недѣлимы и слѣдов. каждой по себѣ долженѣ быть кубѣ. Но когда возмется $t+u=f^3$ и $t-u$

$t-u=g^3$, то слѣдуетъ оттуда $2u=f^3-g^3$, что также надлежало бы быть кубомъ, по тому что $2u$ есть кубъ. Такимъ бы образомъ можно найти два гораздо меншїе куба f^3 и g^3, которыхъ разность была бы кубъ, и слѣдов. также такїе, которыхъ сумма дѣлаетъ кубъ: ибо надлежитъ только поставить $f^3-g^3=h^3$, то будетъ $f^3=h^3+g^3$; и такъ имѣли бы мы два куба, которыхъ сумма также кубъ. Симъ прежнее доказательство совершенно подкрѣпляется, что когда въ самыхъ большихъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, которыхъ сумма или разность была бы кубъ, и сїе для того что въ самыхъ меншихъ числахъ такихъ не находится.

1046.

Когда невозможно найти такихъ двухъ кубовъ, коихъ бы сумма или разность была кубъ, то прежней нашъ вопросъ

просъ уничтожается ; обыкновенно же начинаютъ съ сего вопроса: какимъ образомъ найти три куба, которыхъ бы сумма дѣлала кубъ? Изъ оныхъ два можно взять по изволенїю, такъ что третей только сыскать надлежитъ, которой вопросъ теперь мы разсмотримъ.

1047.

Вопросъ. Къ даннымъ двумъ кубамъ a^3 и b^3 найти еще третей, которой бы съ прежними вмѣстѣ составилъ кубъ?

По сему формула $a^3+b^3+x^3$ должна быть кубъ, чего иначе учинить не льзя, какъ только что имѣть извѣстной случай. Сей случай самъ попадается, а имянно когда $x=-a$, положивъ $x=y-a$ будешъ $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$ и формула наша должна быть кубъ $y^3-3ayy+3aay+b^3$, въ которомъ первой и послѣдней членъ кубы, то заразъ два рѣшенїя найти можно.

I. По первому возми корень $=y+b$, коего кубъ есть $y^3+3byy+3bby+b^3$ и получится $-3ay+3aa=3by+3bb$, откуда $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$, слѣдов. $x=-b$, что намъ ни мало не служитъ.

II. Можно также положить корень $=b+fy$, котораго кубъ есть $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$; опредѣли f такъ, чтобы третіе члены уничтожились. Сіе здѣлается когда $3aa=3bbf$, или $f=\frac{aa}{bb}$, первые же два члена раздѣливъ на yy даютъ $y-3a=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^3}$; помноживъ на b^6 получится $a^6y+3a^4b^3$, откуда найдется $y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3}$; а отсюда $x=y-a=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}$.

И такъ

И такъ изъ данныхъ обоихъ кубовъ a^3 и b^3 найдется корень третьяго искомаго куба ; а что бы оной былъ положительной , то надлежитъ только b^3 взять за самой большей кубъ , что мы изъяснимъ нѣкоторыми примѣрами.

I. Пусть будутъ данные два куба 1 и 8, такъ что $a=1$ и $b=2$, то формула $9+x^3$ будетъ кубъ , когда $x=\frac{17}{7}$: ибо тогда выдетъ $9+x^3=\frac{8000}{343}=(\frac{20}{7})^3$.

II. Положимъ данные два куба 8 и 27, такъ, что $a=2$ и $b=3$, то формула $35+x^3$ будетъ кубомъ , когда $x=\frac{124}{19}$.

III. Пусть будутъ два данные куба 27 и 64 , такъ что $a=3$ и $b=4$, то выдетъ сїя формула $91+x^3$ кубомъ , когда $x=\frac{465}{37}$.

Естьли бы къ даннымъ двумъ кубамъ похотѣли еще больше такихъ третьихъ искать , то должно бы въ первой формулѣ $a^3+b^3+x^3$ положить еще $x=$

2ab

$\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}+z$, и тогда бы пришли мы къ подобной формулѣ, изъ которой новыя знаменованія вмѣсто x опредѣлить можно бы было; но сіе бы завело насъ въ превеликіе выкладки.

1048.

При семъ вопросѣ попадается удивительный случай, когда оба данные куба равны между собою, или $b=a$: ибо тогда найдемъ $x=\frac{3a^4}{0}$, т. е. безконечной, и слѣдов. не получимъ никакого рѣшенія, чего ради сего вопроса, когда $2a^3+x^3$ должно быть кубомъ, разрѣшить не можно. Пусть наприм. $a=1$, и слѣдов. формула наша $2+x^3$, то надлежитъ примѣчать, что какіе бы перемѣны предпріяты ни были, то все стараніе тщетно и никогда оттуда надлежащаго знаменовованія для x найти не можно; по чему съ достовѣрностію заключаемъ, что къ удвоенному кубу никакого куба сыскать

не льзя, которой бы съ онымъ вмѣстѣ составилъ паки кубъ, или сїе уравненїе $2a^3 + x^3 = y^3$ невозможно. Отсюда слѣдуетъ $2a^3 = y^3 - x^3$. слѣдов. также не возможно найти двухъ кубовъ, которыхъ бы разность была удвоенной кубъ, что такожде и о суммѣ двухъ кубовъ разумѣть должно и слѣдующимъ образомъ доказано быть можетъ.

1049.

Ѳеорема. Ни сумма, ни разность двухъ кубовъ удвоенному кубу никогда равна быть не можетъ, или сїя формула $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ сама по себѣ невозможна, выключая $y = x$, которой случай чрезъ себя виденъ.

Здѣсь можно опять x и y взять за недѣлимыя между собою числа: ибо естьли бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы и z также на онаго могъ раздѣлиться, и слѣдов. цѣлое уравненїе на кубъ бы онаго раздѣлилось. Понеже $x^3 \pm y^3$ должно быть четное число, то обоимъ числамъ x и y надлежитъ быть нечетнымъ

нымъ; по чему какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ четная. И такъ положивъ $\frac{x+y}{2}=p$, а $\frac{x-y}{2}=q$, будетъ $x=p+q$, а $y=p-q$, и тогда изъ чиселъ p и q одно должно быть четное, а другое нечетъ. Отсюда $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$ и $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(3pp+qq)$, которыя обѣ формулы во всемъ между собою сходны: и такъ довольно будетъ показать, что формула $2p(pp+3qq)$ удвоеннымъ кубомъ, каковъ $2z^3$, не будетъ, и слѣдов. сія $p(pp+3qq)$ кубъ быть не можетъ; чему доказательство въ слѣдующихъ положенїяхъ содержится.

I. Здѣсь опять два случая разсматривать можно, изъ коихъ первой, когда два множителя p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ, и тогда каждой самъ долженъ быть кубъ. Другой же случай, когда они общаго дѣлителя имѣютъ, которой какъ уже мы прежде видѣли, не другой какой, какъ 3, быть можетъ.

II.

II. *Первой случай.* Пусть будетъ p на 3 не дѣлимо, и слѣдов. оба множители между собою недѣлимы, то здѣлай сперва $pp+3qq$ кубомъ, что учинится, когда $p=t(tt-9uu)$ а $q=3u(tt-uu)$, и тогда знаменованіе числа p долженствуетъ быть также кубъ; но t на 3 недѣлимо, по тому что иначе бы p на 3 дѣлилось, то два множителя t и $tt-9uu$ между собою недѣлимы, и слѣдовательно каждой самъ долженъ быть кубъ.

III. Но послѣдней самъ состоитъ еще изъ двухъ множителей, а имянно $t+3u$ и $t-3u$, кои между собою недѣлимы. Понеже сперва t на 3 дѣлиться не можетъ, а потомъ одно изъ чиселъ t и u четное, а другое нечетъ. Ежели бы оба были нечетныя, то не только бы p, но и q было четное, чему статься не льзя, слѣдов. каждой изъ сихъ множителей $t+3u$ и $t-3u$ долженъ быть кубъ.

IV.

IV. И по сему возми $t+3u=f^3$, а $t-3u=g^3$, и будетъ $2t=f^3+g^3$, но t само по себѣ есть кубъ, которой пусть $=h^3$: и такъ имѣли бы мы $f^3+g^3=2h^3$; т. е. нашли бы мы два гораздо меньшїе куба, а имянно f^3 и g^3, которыхъ бы сумма была удвоенной кубъ.

V. *Другой случай.* Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ, то положивъ $p=3r$ формула наша будетъ $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы, и по сему каждой кубомъ быть долженствуетъ.

VI. А что бы послѣдней кубомъ здѣлать, то возми $q=t(tt-9uu)$, а $r=3u(tt-uu)$, и тогда изъ чиселъ t и u одно четное, а другое нечетъ быть должно; ибо въ противномъ случаѣ оба числа q и r были бы четныя; отсюда найдется первой множитель $9r=27u(tt-uu)$, которой также кубомъ быть долженъ, и слѣдов. раздѣлен-

дѣленной на 27 также, т. е. $u(tt-uu)=u(t+u)(t-u)$.

VII. Понеже сїи 3 множителя также между собою недѣлимы, то каждой по себѣ кубъ быть долженъ: для того положи оба послѣднїе $t+u=f^3$, а $t-u=g^3$ и получится $2u=f^3-g^3$; когда теперь u должно также кубомъ быть, то получимъ мы 2 куба въ гораздо меньшихъ числахъ f^3 и g^3, которыхъ разность подобнымъ образомъ была бы удвоенной кубъ.

VIII. Когда въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, коихъ бы сýмма, или разность была удвоенной кубъ, то явствуетъ, что и въ большихъ числахъ оныхъ не будетъ.

IX. Можно бы было сказать, что въ малыхъ числахъ такой случай и есть, а имянно, когда $f=g$, и такъ бы прежнее доказательство насъ обмануть могло. Но когда $f=g$, то въ первомъ бы случаѣ было $t+3u=t$ слѣдов. $u=0$: и такъ q было $-3u$, бы

бы также $=0$. А мы положили $x=p+q$ и $y=p-q$, то бы первые два куба x^3 и y^3 были также между собою равны, которой случай имянно изключается. Равнымъ образомъ и въ другомъ случаѣ, когда $f=g$, надлежало бы быть $t+u=t-u$, и слѣд. опять $u=0$, по чему также $r=0$ и $p=0$, и первые бы кубы x^3 и y^3 были паки равны, о которомъ случаѣ здѣсь вопроса нѣтъ.

1050.

Вопросъ. Найти вообще 3 куба x^3, y^3 и z^3, коихъ бы сумма составила кубъ?

Мы уже видѣли, что ежели два изъ сихъ кубовъ возмутся за извѣстные, то оттуда завсегда третей опредѣлить можно, естьли только два первые между собою не равны. Но по прежнему способу въ каждомъ случаѣ находится одно только знаменованіе для третьяго куба и весьма бы было трудно находить оттуда больше такихъ кубовъ.

Здѣсь

Здѣсь беремъ мы всѣ 3 куба за неизвѣстные; а чтобы показать общее рѣшенїе, то положимъ $x^3+y^3+z^3=v^3$, вычитая z^3 съ обѣихъ сторонъ получится $x^3+y^3=v^3-z^3$, которое уравненїе удовлетворяетъ слѣдующимъ образомъ.

I. Возьми $x=p+q$, $y=p-q$ и будетъ, какъ уже мы видѣли, $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; и по томъ положи $v=r+s$, $z=r-s$, и найдется $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$, слѣдоват. должно быть $2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr)$, или $p(pp+3qq)=s(ss+3rr)$.

II. Прежде уже видѣли, что $pp+3qq$ никакихъ другихъ множителей не имѣетъ, кромѣ содержащихся въ самой сей формулѣ. Понеже обѣ сїи формулы $pp+3qq$ и $ss+3rr$ неотмѣнно общаго дѣлителя имѣть должны, то пусть будетъ оной $=tt+3uu$.

III. На сей конецъ положи $pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$ и $ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu)$, выдетъ $p=ft+3gu$, $q=gt-fu$ и будетъ

$pp=fftt+6fgtu+9gguu$, $qq=ggtt-2fgtu+ffuu$, слѣдов. $pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu=(ff+3gg)(tt+3uu.)$.

IV. Равнымъ образомъ изъ другой формулы получимъ $s=ht+3ku$ и $r=kt-hu$; и оттуда $ss=hhtt+6hktu+9kkuu$; $3rr=3kktt-6hktu+3hhuu$ и такъ $ss+3rr=hh(tt+3uu)+3kk(tt+3uu)=(hh+3kk)(tt+3uu)$. Но $s(ss+3rr)=p(pp+3qq)$, а отсюда выходитъ сїе уравненїе $(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu)$, которое раздѣливъ на $tt+3uu$ будетъ

$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk)$, или $ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg)$, откуда

$t=\frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u$.

V. Для сысканїя цѣлыхъ чиселъ, возми $u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk)$, и будетъ $t=3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)$, гдѣ 4 буквы f, g, h и k по изволенїю взять можно.

VI.

VI. Нашедъ изъ сихъ четырехъ чиселъ знаменованія для t и u получится: I) $p=ft+3gu$; II) $q=gt-fu$; III) $s=ht+3ku$; IV) $r=kt-hu$ и наконецъ для разрѣшенія нашего вопроса $x=p+q$, $y=p-q$, $z=r-s$ и $v=r+s$, которое рѣшеніе есть общее, и что всѣ возможные случаи въ немъ содержатся: потому что во всемъ вычисленіи никакихъ произвольныхъ ограничиваній не дѣлано. Все искусство состоитъ въ томъ, чтобъ уравненіе наше на $tt+3uu$ могло раздѣлиться, чрезъ что буквы t и u опредѣлены будутъ, простымъ уравненіемъ. Употребленіе сея формулы представлено быть можетъ безконечно многими способами, чему мы предложимъ нѣкоторые примѣры.

I. Пусть будетъ $k=0$, $h=1$, найдется $t=-3g(ff+3gg)$ и $u=f(ff+3gg)-1$; откуда $p=-3fg(ff-3gg)+3fg(ff+3gg)-3g=-3g$; $q=-(ff+3gg)^2+f$, по томъ $s=-3g(ff+3gg)$ и $r=-f(ff+3gg)+1$, а отсюда наконецъ получится $x=-3g-(ff+3gg)^2+f$,

$y = -3g + (ff+3gg)^2 - f$, $z = (3g-f)(ff+3gg)+1$ и наконецъ $v = -(3g+f)(ff+3gg)+1$. Положивъ теперь $f = -1$ и $g = +1$ получится $x = -20$, $y = 14$ $z = 17$ и $v = -7$; по чему имѣемъ мы слѣдующее уравненіе $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$, или $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Пусть будетъ $f = 2$, $g = 1$, слѣдов. $ff + 3gg = 7$; потомъ $h = 0$, $k = 1$, по чему $hh + 3kk = 3$, будетъ $t = -12$, $u = 14$; откуда $p = 2t + 3u = 18$; $q = t - 2u = -40$ $r = t = -12$ и $s = 3u = 42$; слѣдов. получится $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$; $z = r - s = -54$ и $v = r + s = 30$, такъ что $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, или $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$; но понеже всѣ корни на 2 могутъ раздѣлиться, то будетъ также $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$.

III. Возмемъ $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$, $k = 1$ такъ что $ff + 3gg = 12$, $hh + 3kk = 4$ найдется $t = -24$ и $u = 32$, которые на 8 могутъ раздѣлиться. А понеже здѣсь дѣло состоитъ въ ихъ содержаніи, то положимъ $t = -3$, и $u = 4$, откуда $p = 3t + 3u = +3$;

а $q=t-3u=-15$, $r=t-u=-7$ и $s=t+3u=+9$; слѣдов. $x=-12$; $y=18$, $z=-16$ и $v=2$, такъ что $-12^3+18^3-16^3=2^3$ или $18^3=16^3+12^3+2^3$, или раздѣливъ на 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV. Возмемъ $g=0$, $k=h$, такъ что f и h опредѣлены не будутъ, то получится $ff+3gg=ff$ и $hh+3kk=4hh$, откуду $t=12h^3$ и $u=f^3-4h^3$; потомъ $p=ft=12fh^3$, $q=-f^4+4fh^3$, $r=-12h^4-hf^3+4h^4=16h^4-hf^3$ и $s=3hf^3$; слѣдов. $x=p+q=16fh^3-f^4$; $y=p-q=8fh^3+f^4$, $z=r-s=16h^4-4hf^3$ и $v=r+s=16h^4+2hf^3$. Положимъ теперь $f=h=1$ найдется $x=15$, $y=9$, $z=12$ и $v=18$, а раздѣливъ на 3 получится $x=5$, $y=3$, $z=4$ и $v=6$ такъ что $3^3+4^3+5^3=6^3$. При семъ примѣчанія достойно, что сіи три корня 3, 4, 5, единицею возрастаютъ; чего ради разсмотримъ, нѣтъ ли еще больше такихъ чиселъ.

1051.

Вопросъ. Требуются 3 числа въ ариѳметической прогрессіи, коей разность $=1$, чтобы кубы оныхъ чиселъ составили вмѣстѣ кубъ?

 Пусть

Пусть будетъ x среднее изъ сихъ чиселъ, то меншее $=x-1$, а большее $x+1$; оныхъ кубы сложивъ вмѣстѣ даютъ $3x^3+6x=3x(xx+2)$, что долженствуетъ быть кубомъ. Къ сему потребно знать одинъ случай, въ которомъ сїе бываетъ, и по нѣкоторымъ пробамъ найдется $x=4$; чего ради по прежнимъ правиламъ положимъ $x=4+y$, и будетъ $xx=16+8y+yy$, $x^3=64+48y+12yy+y^3$, слѣдов. формула наша будетъ $216+150y+36yy+3y^3$, гдѣ первой членъ кубъ, а послѣдней нѣтъ. Сего ради возми корень $=6+fy$ и здѣлай чтобъ первые оба члена уничтожились. Понеже кубъ онаго корня есть $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, то должно быть $150=108f$, и слѣдов. $f=\frac{25}{18}$; остальные же члены раздѣливъ на yy дают $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^3}y$, или $18^3.36+18^3.3y=18^2.25^2+25^3y$, или $18^3.36-18^2.25^2=25^3y-3y.18^3$; почему $y=\frac{18^3.36-18^2.25^2}{25^3-3.18^3}=\frac{18^2(18.36-25^2)}{25^3-3.18^3}$; $y=-\frac{324.23}{1871}=-\frac{7452}{1871}$, слѣдов. $x=\frac{32}{1871}$.

Трудно

Трудно бы показалось сїе обращенїе въ кубы продолжать далѣе; но надлежитъ примѣчать, что вопросъ можно завсегда привесть къ квадратамъ. Понеже $3x(xx+2)$ должно быть кубомъ, то положи оной $=x^3y^3$ и получится $3xx+6=xxy^3$, слѣдов. $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Когда числитель сея дроби уже квадратъ, то нужно только знаменателя $6y^3-18$ здѣлать квадратомъ; къ сему потребно также знать одинъ случай, и понеже 18 на 9 дѣлится, а 6 только на 3, то y долженъ также на 3 дѣлиться: сего ради положи $y=3z$ и будетъ нашъ знаменатель $=162z^3-18$, которой раздѣливъ на 9 будетъ $18z^3-2$ и которой квадратомъ быть долженствуетъ. Сїе здѣлается когда $z=1$. Для сей притчины возми $z=1+v$, то должно быть $16+54v+54vv+18v^3=\square$; положи теперь корень $=4+\frac{27}{4}v$, котораго квадратъ есть $16+54v+\frac{729}{16}vv$; почему $54+18v=\frac{729}{16}$; или $18v=-\frac{135}{16}$, слѣдов; $2v=-\frac{15}{16}$ и $v=-\frac{15}{32}$; откуда найдется $z=1+v=\frac{17}{32}$, по томъ $y=\frac{51}{32}$.

Разсмотримъ теперь прежняго знаменателя, которой былъ $6y^3-18=162z-18=9(18z^3-2)$, но сего множителя $18z^3-2$ клали мы квадратной корень $=-\frac{107}{128}$; слѣд. квадратной корень изъ всего знаменателя есть $\frac{321}{128}$; а изъ числителя оной есть 6, откуда $x=\frac{6}{-\frac{321}{128}}=-\frac{256}{107}$, которое знаменованіе отъ прежняго совсемъ различно, и по сему корни нашихъ трехъ кубовъ будутъ слѣдующіе: I) $x-1=-\frac{149}{107}$; II) $x=-\frac{256}{107}$, III) $x+1=-\frac{363}{107}$, коихъ кубы сложенные въ одну сумму производятъ кубъ, котораго корень будетъ $xy=-\frac{256}{107}\cdot\frac{51}{32}=-\frac{408}{107}$.

1052.

Симъ намѣрены мы заключить сію часть неопредѣленной Аналитики: ибо изъ приложенныхъ вопросовъ имѣли уже мы случай изъяснить знатнѣйшіе пріемы употребительнѣйшіе по сіе мѣсто въ сей наукѣ.

20